К ОДНОВРЕМЕННОМУ ВОССТАНОВЛЕНИЮ ХАРАКТЕРИСТИК НЕСКОЛЬКИХ ГРАВИТИРУЮЩИХ ТЕЛ В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ НЬЮТОНОВСКОГО ПОТЕНЦИАЛА

И.В. Бойков, В.А. Рязанцев

Пензенский государственный университет

24 января 2022 г.

В докладе описываются аналитический и численный методы одновременного восстановления параметров двух источников аномального гравитационного поля. В основе методов лежит нелинейная математическая модель обратной задачи теории логарифмического и ньютоновского потенциала, развитая авторами в более ранних работах. Эта модель используется для построения системы приближённых интегральных уравнений, математически описывающих поставленную задачу. Проведение замены неизвестных функций позволяет применить к системе уравнений преобразование Фурье, результатом чего является система линейных уравнений, зависящих от параметров. В результате применения обратного преобразования Фурье к решению этой системы и перехода к исходным неизвестным функциям достигается решение поставленной задачи. В качестве исходных данных рассматриваемой задачи используются значения вертикальной производных первого и второго порядков потенциала аномального гравитационного поля на поверхности Земли.

В данном докладе авторы продолжают направление исследований, ранее развитое в целом ряде работ, в числе которых следует в первую очередь назвать:

1. И. В. Бойков, В. А. Рязанцев. Приближенные методы одновременного восстановления формы тела и его плотности в обратной задаче теории потенциала. Журнал Средневолжского математического общества. 2014. Т. 16, № 3. С. 21-31.
2. И. В. Бойков, В. А. Рязанцев. Об одной математической модели одновременного восстановления параметров источника магнитной аномалии в обратной задаче магниторазведки. Аналитические и численные методы моделирования естественно-ниучных и социальных проблем. Материалы XI Международной научно-технической конференции. Пенза: изд-во ПГУ. 2016. С. 111-120.
3. И. В. Бойков, В. А. Рязанцев. Об одной математической модели одновременного восстановления параметров источника магнитной аномалии в обратной задаче магниторазведки. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ имени Е.В. Воскресенского. Материалы VIII Международной научной молодежной школы-семинара. Саранск: изд-во СВМО. 2018. С. 26-29.
4. И. В. Бойков, В. А. Рязанцев. Об одновременном определении параметров гравитирующих тел в обратной задаче теории логарифмического потенциала. Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем. Материалы XIII Международной научно-технической конференции молодых специалистов, аспирантов и студентов. Пенза: изд-во ПГУ. 2019. С. 196-203.
5. И. В. Бойков, В. А. Рязанцев. К вопросу об одновременном восстановлении плотности и уравнения поверхности в обратной задаче гравиметрии для контактной поверхности. Сибирский жарнал вычислительной математики. 2020. Т. 23, № 3. С. 289-308.

Наибольший интерес представляет работа [5].
В этой работе исследуются аналитические и численные методы решения обратных задач логарифмического и ньютоновского потенциалов. В случае ньютоновского потенциала рассматривается следующая задача. В области

$$\Omega = \{(x, y) : -l \leqslant x, y \leqslant l, H - \varphi(x, y) \leqslant z \leqslant H\}$$

распределены возмущающие гравитационное поле Земли источники, имеющие плотность $\rho(x, y)$. Требуется одновременно восстановить глубину залегания H контактной поверхности, плотность источников $\rho(x, y)$, а также функцию $\varphi(x, y)$, определяющую поверхность. В основе методов лежат построенные в работе нелинейные модели теории потенциала.

Для случая ньютоновского потенциала в качестве априорно заданной используются следующие виды информации: 1) значения силы тяжести, а также его первой и второй производных; 2) значения поля силы тяжести на разных высотах. Показана возможность одновременного восстановления $\rho(x, y)$, $\varphi(x, y)$, H аналитическим образом. Построены итерационные методы их одновременного восстановления. При помощи решения модельных примеров показана высокая эффективность предложенных численных методов. Отметим, что эти методы допускают распараллеливание.

Математическая модель

Введём в рассмотрение декартову систему координат, направив ось аппликат вертикально вниз. Предположим, что источниками аномалии сил тяжести являются два тела.

Первое тело представляет собой слой бесконечной протяжённости по направлениям Ox и Oy, расположенный между плоскостями $z = H_1$ и $z = H_2$, где $H_1 < H_2$.

Вторым является тело конечных размеров, расположенное в квадрате $(x, y) \in [-\ell, \ell]^2$ между поверхностями $z = H_1 - \varphi(x, y)$ и $z = H_1$. Здесь $\varphi(x, y) \in L_2\left(\mathbb{R}^2\right)$.

Математическая модель

Первое тело, имеющее плотность $\sigma_1(x, y, z)$, создаёт в точке (x, y, z) вне тела аномальное гравитационное поле $v_1(x, y, z)$, определяемое интегральной формулой

$$G \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{H_1}^{H_2} \frac{\sigma_1(\xi, \eta, \zeta)(\zeta - z)}{\left((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2\right)^{3/2}}\, d\zeta\, d\eta\, d\xi = v_1(x, y, z). \tag{1}$$

Второе тело плотности $\sigma_2(x, y, z)$ в каждой точке (x, y, z) вне тела является источником аномалии гравитационного поля $v_2(x, y, z)$, которая описывается формулой:

$$G \int\limits_{-\ell}^{\ell} \int\limits_{-\ell}^{\ell} \int\limits_{H_1-\varphi(\xi,\eta)}^{H_1} \frac{\sigma_2(\xi, \eta, \zeta)(\zeta - z)}{\left((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2\right)^{3/2}}\, d\zeta\, d\eta\, d\xi = v_2(x, y, z). \tag{2}$$

Математическая модель

В рамках описываемого метода строятся более простые, но также нелинейные уравнения, аппроксимирующие уравнения (1) и (2) соответственно. Построения выполняются при следующих дополнительных предположениях:

1. плотности $\sigma_1(x, y, z)$ и $\sigma_2(x, y, z)$ не зависят от переменной z;
2. справедливо условие $\varphi(x, y) \ll H_1$;
3. справедливо условие $H_2 - H_1 \ll H_1$.

Математическая модель

При этих предположениях уравнения (1) и (2) после серии достаточно громоздких преобразований аппроксимируются соответственно следующими уравнениями:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sigma_1(\xi,\eta)\frac{2\,(H_2-H_1)\,(H_2-z)-(H_2-H_1)^2}{\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(H_2-z)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,d\xi\,d\eta=v_1(x,y,z). \tag{3}$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{-\ell}^{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell}\sigma_2(\xi,\eta)\frac{2(H_1-z)\varphi(\xi,\eta)-\varphi^2(\xi,\eta)}{\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(H_1-z)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,d\xi\,d\eta=v_2(x,y,z). \tag{4}$$

Описание метода

Пусть требуется определить неизвестные функции $\sigma_1(x,y)$, $\sigma_2(x,y)$ $\varphi(x,y)$ в предположении о том, что известными на поверхности Земли $(z=0)$, являются функции v_1+v_2, $\partial v_1/\partial z+\partial v_2/\partial z$, $\partial^2 v_1/\partial z^2+\partial^2 v_2/\partial z^2$. Параметры H_1, H_2, ℓ считаем известными.
Воспользуемся уравнениями (3), (4) для моделирования решаемой задачи, для чего продифференцируем нужное число раз каждое из уравнений (3), (4).
Поставленная задача моделируется системой уравнений.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sigma_1(\xi,\eta)\frac{2H_2\left(H_2-H_1\right)-\left(H_2-H_1\right)^2}{\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+H_2^2\right)^{3/2}}d\xi d\eta+$$

$$+\int\limits_{-\ell}^{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell}\sigma_2(\xi,\eta)\frac{2H_1\varphi(\xi,\eta)-\varphi^2(\xi,\eta)}{\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+H_1^2\right)^{3/2}}d\xi d\eta=f_1(x,y), \quad (5)$$

Описание метода

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sigma_1(\xi,\eta)\frac{6\,(H_2-H_1)\,H_2^2-3(H_2-H_1)^2H_2}{\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+H_2^2\right)^{5/2}}d\xi d\eta-$$

$$-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{2\sigma_1(\xi,\eta)\,(H_2-H_1)}{\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+H_2^2\right)^{3/2}}d\xi d\eta+$$

$$+\int\limits_{-\ell}^{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell}\sigma_2(\xi,\eta)\frac{6H_1^2\varphi(\xi,\eta)-3H_1\varphi^2(\xi,\eta)}{\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+H_1^2\right)^{5/2}}d\xi d\eta-$$

$$-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{2\sigma_2(\xi,\eta)\varphi(\xi,\eta)}{\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+H_1^2\right)^{3/2}}d\xi d\eta=f_2(x,y),\quad (6)$$

Описание метода

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sigma_1(\xi,\eta)\frac{3\,(H_2-H_1)-18H_2(H_2-H_1)^2}{\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+H_2^2\right)^{5/2}}d\xi d\eta+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sigma_1(\xi,\eta)\frac{30H_2^3\,(H_2-H_1)-15H_2^2(H_2-H_1)^2}{\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+H_2^2\right)^{7/2}}d\xi d\eta+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sigma_2(\xi,\eta)\frac{3\varphi(\xi,\eta)-18H_1\varphi^2(\xi,\eta)}{\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+H_1^2\right)^{5/2}}d\xi d\eta+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sigma_2(\xi,\eta)\frac{30H_1^3\varphi(\xi,\eta)-15H_1^2\varphi^2(\xi,\eta)}{\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+H_1^2\right)^{7/2}}d\xi d\eta=f_3(x,y). \quad (7)$$

Описание метода

Здесь

$$f_1(x,y) = 2v_1(x,y,0)+2v_2(x,y,0), \quad f_2(x,y) = 2\left(\partial v_1/\partial z \ + \partial v_2/\partial z \ \right)\Big|_{z=0},$$

$$f_3(x,y) = 2\left(\partial^2 v_1/\partial z^2 + \partial^2 v_2/\partial z^2\right)\Big|_{z=0}.$$

Введём в рассмотрение новые неизвестные функции $w_1(x,y)$, $w_2(x,y)$, $w_3(x,y)$, определяемые следующими формулами:

$$w_1(x,y) = \sigma_1(x,y), \ w_2(x,y) = \sigma_2(x,y)\varphi(x,y),$$
$$w_3(x,y) = \sigma_2(x,y)\varphi^2(x,y).$$

Описание метода

Тогда уравнения (5)-(7) перепишутся следующим образом

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{2H_2\left(H_2-H_1\right)-\left(H_2-H_1\right)^2}{\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+H_2^2\right)^{3/2}}w_1(\xi,\eta)+\right.$$
$$\left.+\frac{2H_1w_2(\xi,\eta)-w_3(\xi,\eta)}{\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+H_1^2\right)^{3/2}}\right]d\xi\,d\eta=f_1(x,y),\quad (8)$$

Описание метода

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{6\,(H_2-H_1)\,H_2^2-3(H_2-H_1)^2H_2}{\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+H_2^2\right)^{5/2}}w_1(\xi,\eta)d\xi d\eta-$$

$$-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{2\,(H_2-H_1)}{\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+H_2^2\right)^{3/2}}w_1(\xi,\eta)d\xi d\eta+$$

$$+\int\limits_{-\ell}^{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell}\frac{6H_1^2w_2(\xi,\eta)-3H_1w_3(\xi,\eta)}{\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+H_1^2\right)^{5/2}}d\xi d\eta-$$

$$-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{2w_2(\xi,\eta)}{\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+H_1^2\right)^{3/2}}d\xi d\eta=f_2(x,y), \quad (9)$$

Описание метода

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{3\,(H_2-H_1)-18H_2(H_2-H_1)^2}{\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+H_2^2\right)^{5/2}}w_1(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{30H_2^3\,(H_2-H_1)-15H_2^2(H_2-H_1)^2}{\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+H_2^2\right)^{7/2}}w_1(\xi,\eta)d\xi d\eta+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{3w_2(\xi,\eta)-18H_1w_3(\xi,\eta)}{\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+H_1^2\right)^{5/2}}d\xi d\eta+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{30H_1^3w_2(\xi,\eta)-15H_1^2w_3(\xi,\eta)}{\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+H_1^2\right)^{7/2}}d\xi d\eta=f_3(x,y). \quad (10)$$

Описание метода

Применим к каждому из уравнений системы (8)-(10) преобразование Фурье Результатом является следующая параметрическая система линейных уравнений в спектральной области:

$$\mathbf{A}(\omega_1, \omega_2)\, \mathbf{W}(\omega_1, \omega_2) = \tilde{\mathbf{F}}(\omega_1, \omega_2), \tag{11}$$

где

$$\mathbf{W}(\omega_1, \omega_2) = \left(W_1(\omega_1, \omega_2), W_2(\omega_1, \omega_2), W_3(\omega_1, \omega_2)\right)^T,$$

$$\tilde{\mathbf{F}}(\omega_1, \omega_2) = \left(\tfrac{1}{2\pi} F_1(\omega_1, \omega_2), \tfrac{1}{2\pi} F_2(\omega_1, \omega_2), \tfrac{1}{2\pi} F_3(\omega_1, \omega_2)\right)^T,$$

а элементы матрицы $\mathbf{A}(\omega_1, \omega_2) = \left((a_{i,j}(\omega_1, \omega_2))\right)_{i=\overline{1,3}, j=\overline{1,3}}$, определяются в результате аналитического вычисления преобразования Фурье свёртки функций.

Описание метода

Построение метода завершается (аналитическим либо численным) решением системы линейных уравнений (11), применением обратного преобразования Фурье к найденным функциям $W_1(\omega_1, \omega_2)$, $W_2(\omega_1, \omega_2)$, $W_3(\omega_1, \omega_2)$ и обратным переходом от функций $w_1(x, y)$, $w_2(x, y)$, $w_3(x, y)$ к исходным функциям $\sigma_1(x, y)$, $\sigma_2(x, y)$, $\varphi(x, y)$.
При этом поскольку в случае функций f_1, f_2, f_3, заданных приближённо, аналитические формулы решения уравнения (11) на практике оказываются неэффективными, возникает потребность в применении численных методов, включающих в себя процедуры регуляризации.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ