

48-е заседание Международного научного семинара  
им. Д.Г. Успенского – В.Н. Страхова «Вопросы теории и практики  
геологической интерпретации геофизических полей»

*А.С. Долгаль, П.Н. Новикова, А.В. Пугин, В.В. Хохлова*

# ВЫЧИСЛЕНИЕ ТРАНСФОРМАНТ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СФЕРЫ КАВРАЙСКОГО

2022



«Наиболее важными – имеющими определяющее значение - являются линейные интегральные аппроксимации элементов аномальных полей. Именно интегральные аппроксимации вместе с данными первичных наблюдений должны составлять основу нового информационного базиса гравиметрии»

*В.Н. Страхов*

Доклад на 30-й сессии

семинара им. Д.Г. Успенского, 2003 г

## Основные достоинства метода:

- ✓ высокая точность преобразований цифровых моделей геофизических полей;
- ✓ учет различий в высотах точек измерений;
- ✓ подавление негармонической составляющей сигнала (помехи);
- ✓ возможность одновременного выполнения 3D-интерполяции и трансформации данных.

# Аппроксимация гравитационных аномалий на сферической Земле (аналог схемы В.И. Аронова для сферы)

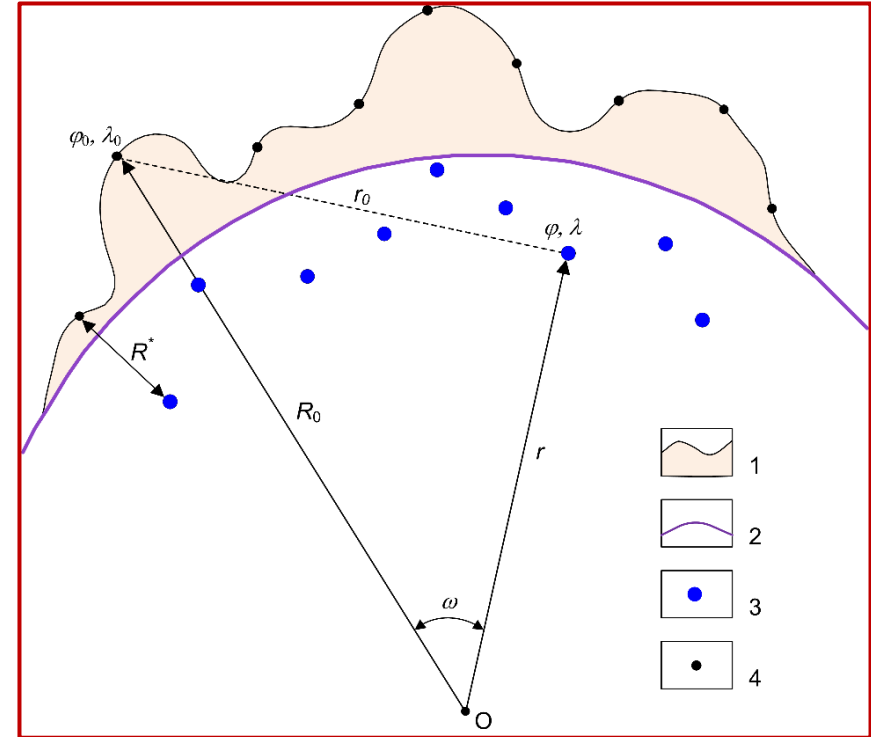
Параметры аппроксимационной конструкции определяются путем решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с приближенно заданной правой частью:

$$\mathbf{G}\mathbf{m} = \mathbf{u}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{G}$  – квадратная матрица значений гравитационных эффектов для точечного источника с единичной массой ( $m = 1$ ),  $\mathbf{m}$  – вектор неизвестных значений аномальных масс,  $\mathbf{u}$  – вектор значений аномалий силы тяжести. Под гравитационным эффектом в данном случае подразумевается радиальная производная гравитационного потенциала точечного источника  $V_R$ , определенная в сферической системе координат  $\sum \varphi, \lambda, r$ :

$$V_R(R_0, \varphi_0, \lambda_0) = fm(R - r\cos\omega)/r_0^3, \quad (2)$$

где  $f = 6.67 \times 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$  – гравитационная постоянная,  $m$  – масса источника,  $R_0, \varphi_0, \lambda_0$  – координаты точки измерений,  $r, \varphi, \lambda$  – координаты источника,  $r_0 = \sqrt{R_0^2 + r^2 - 2R_0r\cos\omega}$ ,  $\omega$  – угол при центре  $O$  земного шара между точкой измерений и источником:  $\cos\omega = \cos\varphi_0\cos\varphi + \sin\varphi_0\sin\varphi\cos(\lambda_0 - \lambda)$ . Источники располагаются на одинаковых относительных глубинах  $R^*$  под точками измерений.



**Схема расположения эквивалентных источников при аппроксимации аномалий силы тяжести для сферической модели Земли:**

1 – земная поверхность;

2 – уровенная поверхность;

3 – точечные массы;

4 – гравиметрические пункты

## Переход от геодезических к сферическим координатам

Известно, что если решать навигационные задачи на поверхности сферы с радиусом  $R = 6371.1$  км, отвечающей по объему референц-эллипсоиду Красовского, при замене геодезической широты  $B$  и долготы  $L$  сферическими координатами  $\varphi, \lambda$ , то погрешности вычисления расстояний не будут превышать 0.5%, а углов – 0.4%. Jonson L.R., Litehiser J.A. еще в 1972 г на основе вычислительных экспериментов установили незначительное различие гравитационных эффектов на сферической и эллипсоидальной Земле, что позволило им сделать вывод о целесообразности использования шарообразной модели для решения большинства задач гравиметрии.

Более точный переход от геодезических координат к сферическим был предложен В.В. Каврайским в 1934 г:

$$\varphi = B - 8'39'' \sin 2B, \quad (3)$$

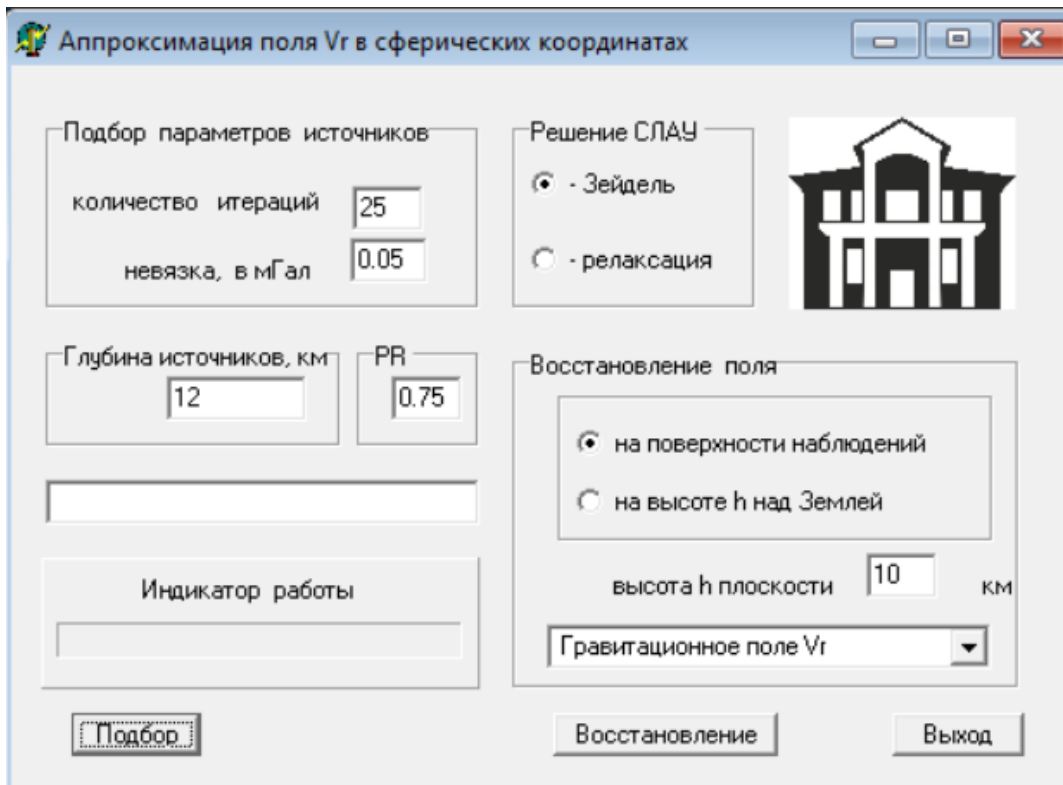
при  $\lambda = L$  и радиусе Земли  $R = 6372.9$  км. Использование сферы Каврайского позволяет снизить относительные погрешности в расстояниях до 0.08%, в угловых величинах – до 0.1%.

## Краткая справка: В.В. Каврайский



**Владимир Владимирович Кавра́йский** (1884–1954 гг) — советский астроном, геодезист и картограф; инженер-контр-адмирал (1944). Лауреат Сталинской премии третьей степени (1952). Основные труды в области математической картографии и астрометрии. Занимался обобщением свойств картографических проекций, установлением математических критериев их оценки, а также разработкой оригинальных проекций, ныне носящих его имя (проекция Каврайского), для карт мира и отдельных частей земной поверхности. Интересны его работы, посвященные изготовлению глобусов. Разработал метод совместного определения времени и широты (способ Каврайского) для выполнения точных астрономических наблюдений в высоких широтах (от +60 до +80). Метод основан на наблюдении не менее двух пар звезд попарно на равных высотах. Ввел усовершенствование в обработку наблюдений пар звезд по способу Певцова на нескольких нитях. Занимался теорией астрономических инструментов и их конструированием. Изобрел новые оптические приборы — пеленгатор и наклономер, с помощью которых навигационные и астрономические определения места корабля стали проще и доступнее даже в условиях недостаточной освещенности.

# Программа APPROX\_SF для вычисления трансформант силы тяжести



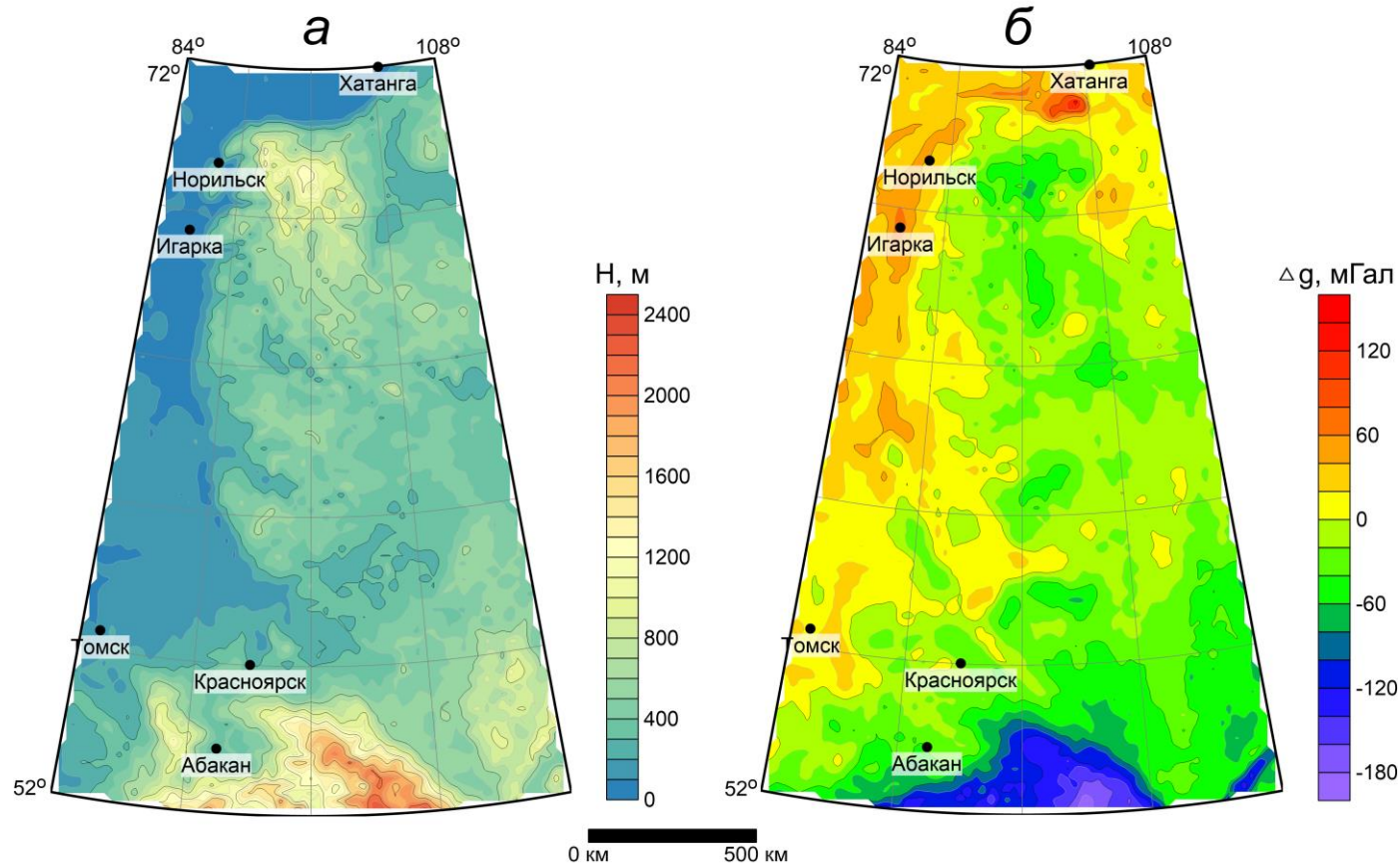
СЛАУ (1) решается итерационным методом Зейделя или релаксации с погрешностью  $\|\mathbf{Gm} - \mathbf{u}\| \cong \delta$ , где  $\delta$  – параметр, сопоставимый с точностью гравиметрической съемки. Хорошее качество аппроксимации аномалий силы тяжести и высокую скорость сходимости итерационного процесса обеспечивает соблюдение условия:

$$1 \leq R^*/\Delta r \leq 1.5, \quad (4)$$

где  $R^*$  – удаление точечной массы от поверхности наблюдений по нормали вниз,  $\Delta r$  – расстояние между точками измерений.

Алгоритм был реализован в виде программы APPROX\_SF, написанной с использованием объектно-ориентированного языка программирования Delphi. При итерационном решении СЛАУ необходимо задать требуемое количество итераций и требуемую точность решения в евклидовой метрике  $F2$ . Дополнительный контроль процесса решения СЛАУ осуществляется в метрике Чебышева  $FM$ . Глубина размещения эквивалентных источников  $R^*$  задается пользователем. На поверхности наблюдений или на поверхности сферы Каврайского заданного радиуса  $R > 6372.9$  км с использованием подобранных значений масс  $\mathbf{m}$  могут быть восстановлены гравитационный потенциал  $V$ , его 1-я  $V_R$  или 2-я  $V_{RR}$  радиальные производные.

# Исходные данные: гравитационное поле западной части Сибирской платформы (глобальная модель WGM 2012)



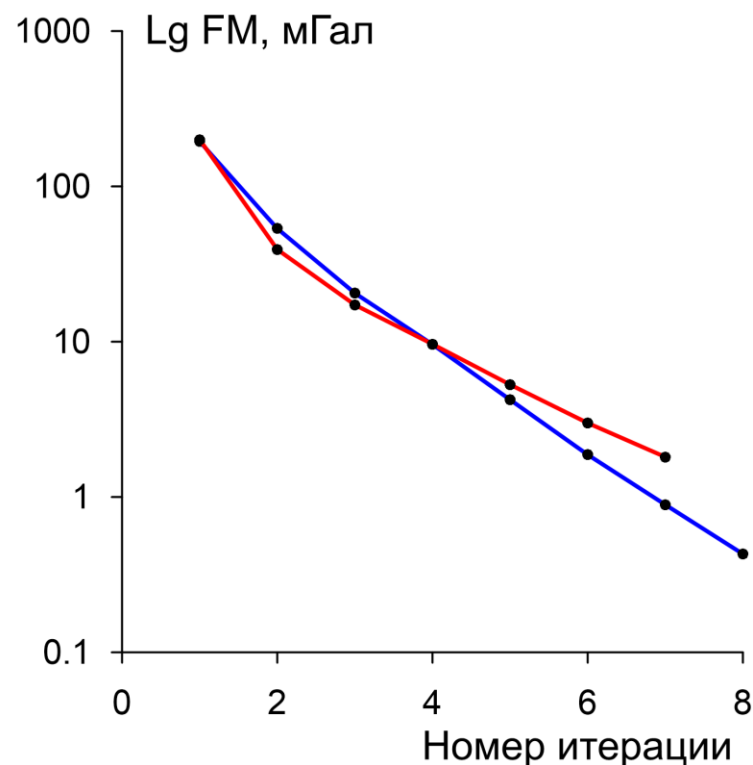
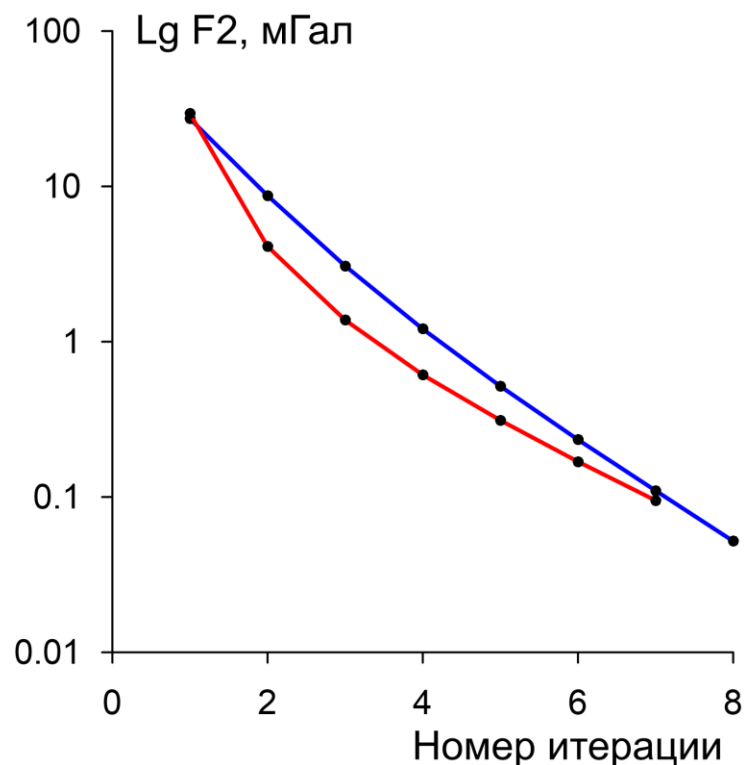
**Исходные данные:** *а* – карта изогипс рельефа земной поверхности; *б* – карта изоаномал силы тяжести в редукции Буге

Размер территории, ограниченной географическими координатами  $52^{\circ}$ – $72^{\circ}$  с.ш.,  $84^{\circ}$ – $108^{\circ}$  в. д. составляет около 2.5 млн км<sup>2</sup>. Территория включает в себя 20 листов топографической карты 1: 1 000 000 масштаба. Цифровые данные представляют собой файлы в формате ASCII GRID с размером 201 строка, 241 столбец. Шаг сети  $0.1^{\circ}$ , т.е. расстояния между точками по меридиану  $\Delta\varphi$  примерно 11130 м, по параллели –  $\Delta\lambda = 6836$  м (по южной рамке площади) и  $\Delta\lambda = 3440$  м (по северной рамке площади). Амплитуда аномалий силы тяжести изменяется от -190 мГал до 128 мГал, максимальная высотная отметка рельефа достигает 2381 м.



# 1. Решение СЛАУ, возникающих в процессе аналитической аппроксимации

С учетом уменьшающего в северном направлении шага сети задания поля  $\Delta\lambda$  была выбрана глубина точечных масс  $R^* = 4$  км. Условием завершения процесса подбора масс эквивалентных источников являлось выполнение неравенства  $F2 \leq 0.1$  мГал. Использовался параметр релаксации  $\omega = 0.75$ , предварительно определенный экспериментальным путем. Напомним, что в методе релаксации новые значения неизвестных  $m_{ij}^{k+1}$  на  $k+1$  итерации вычисляются с использованием ранее полученных приближений:  $m_{ij}^{k+1} = \omega m_{ij}^{k+1} + (1 - \omega)m_{ij}^k$ . Оба метода обеспечивают близкое к экспоненте уменьшение функционалов  $F2$  и  $FM$ , скорость сходимости метода релаксации несколько выше.



Графики итерационного процесса решения СЛАУ методами Зейделя (синий цвет) и релаксации (красный цвет). Примечание: F2 – евклидова метрика, FM – чебышевская метрика

## 2.Решение СЛАУ, возникающих в процессе аналитической аппроксимации

Характеристика итерационных процессов решения СЛАУ разными методами.

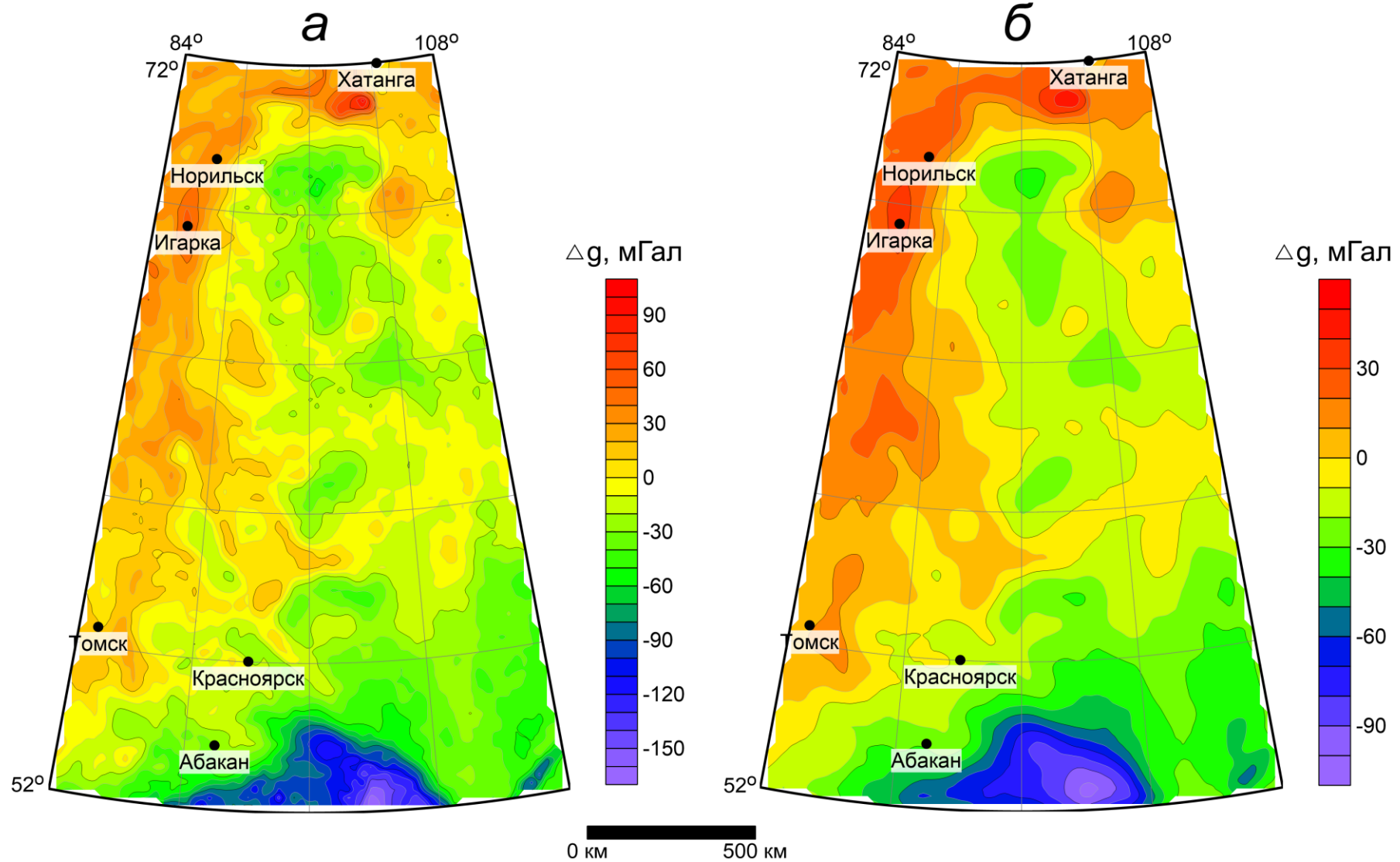
Глубина источников 4 км

Метод решения СЛАУ	Число итераций	Оценка точности		Реальная точность		Время решения, мин:сек
		F2, мГал	FM, мГал	F2, мГал	FM, мГал	
Зейделя	8	0.052	0.430	0.045	0.379	39:39
релаксации	7	0.095	1.810	0.044	0.828	33:48

Характеристика итерационных процессов решения СЛАУ методом Зейделя при разных глубинах эквивалентных источников

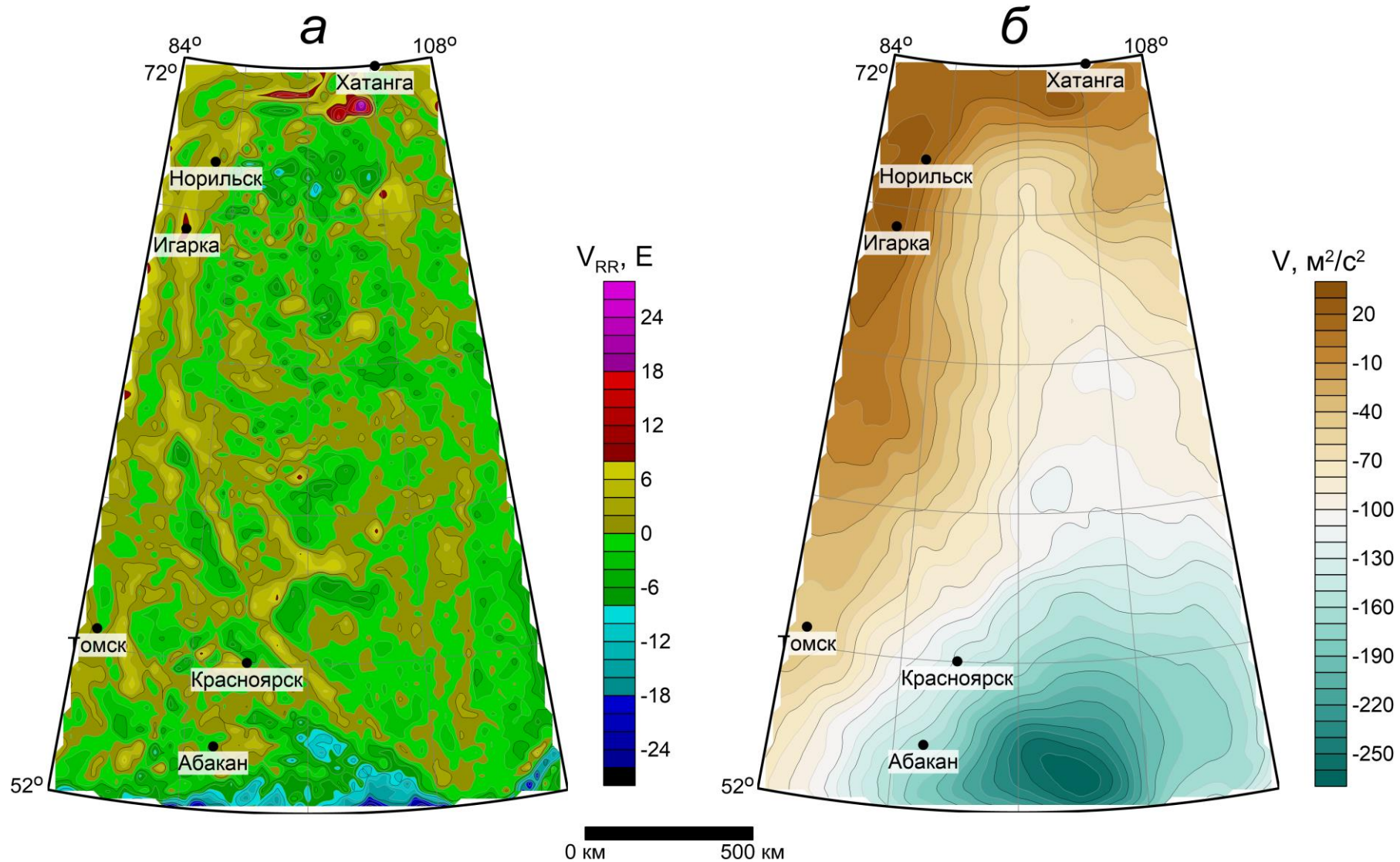
Глубина $R^*$ источников, км	Число итераций	Оценка точности		Реальная точность		Время решения, мин:сек
		F2, мГал	FM, мГал	F2, мГал	FM, мГал	
4	8	0.052	0.430	0.045	0.379	39:39
6	13	0.085	1.358	0.106	0.941	66:00
8	36	0.097	1.559	0.047	0.769	181:31

# 1. Результаты трансформации аномалий силы тяжести



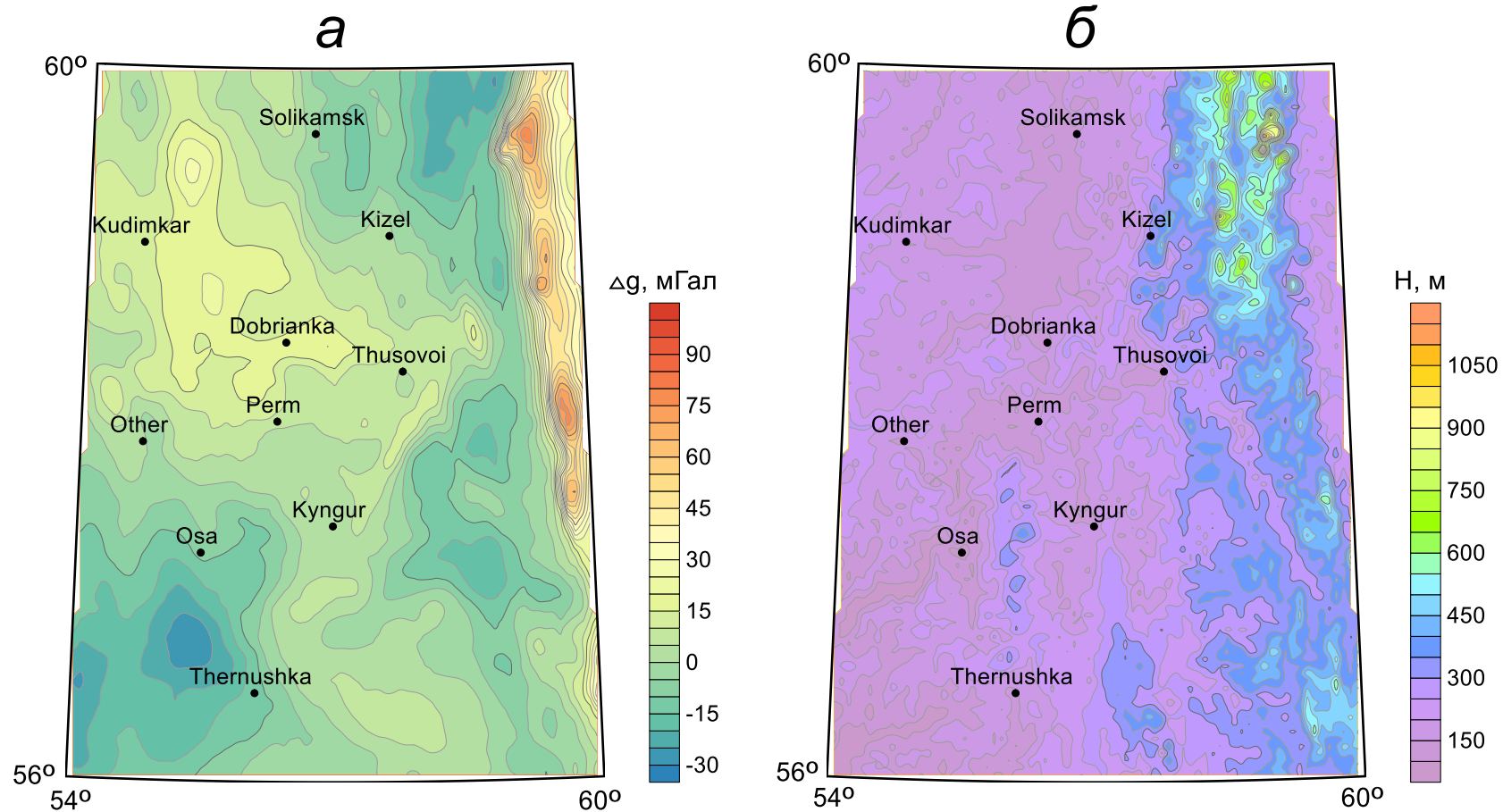
Карты изоаномал силы тяжести  $V_R$  в верхнем полупространстве:  $H = 3$  км (а),  $H = 25$  км (б)

## 2. Результаты трансформации аномалий силы тяжести



Карты изолиний трансформант: 2-й радиальной производной силы тяжести  $V_{RR}$  на высоте  $H = 10$  км (а) и гравитационного потенциала  $V$  на высоте  $H = 3$  км (б)

# Исходные данные: гравитационное поле Пермского края. Лист О-40 (гравиметрическая съемка масштаба 1:200 000)



**Карты:** *a* – изоаномал силы тяжести в редукции Буге; *б* – изогипс рельефа земной поверхности.

Примечание: размер матрицы значений  $V_R$  составляет 201 строку, 132 столбца; шаг между точками составляет  $0.03^\circ$  (примерно 1867 м для параллели  $56^\circ$  и 1670 м на параллели  $60^\circ$ ); размер территории около 162380 км<sup>2</sup>

# Решение СЛАУ, возникающих в процессе аналитической аппроксимации

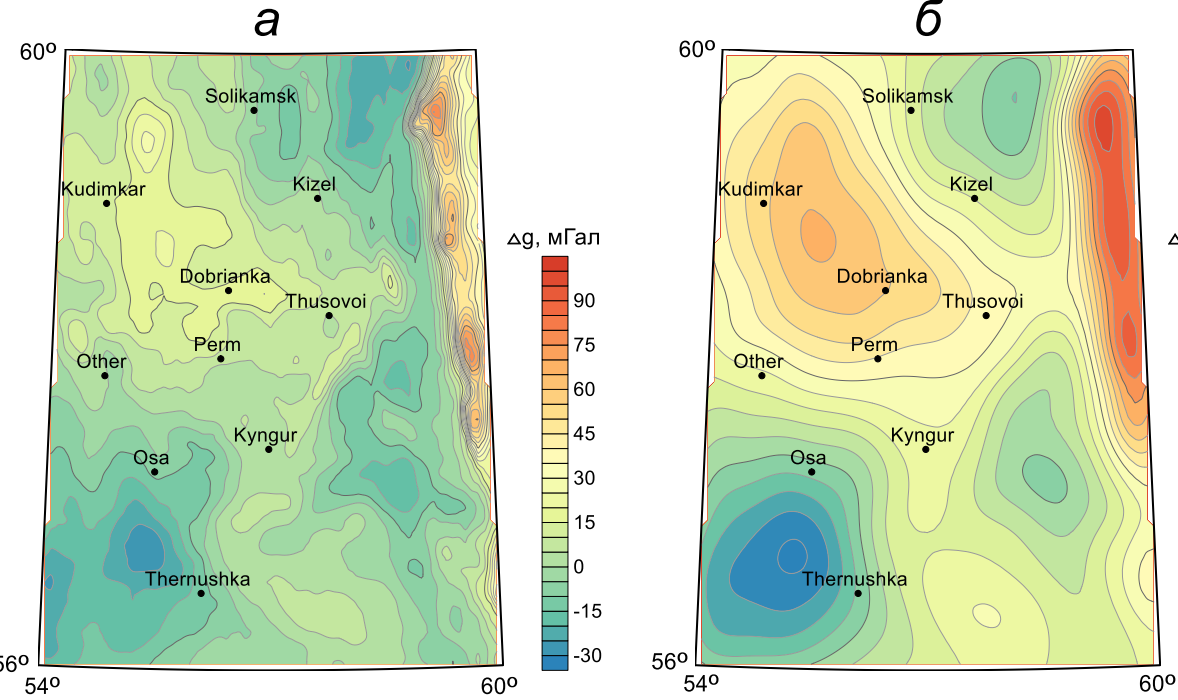
Глубина размещения источников  $R^* = 2000$  м. Решение СЛАУ (1) проводилось методом Зейделя, методом релаксации и методом наискорейшего градиентного спуска. Критерий завершения итерационного процесса  $F2 \leq 0.05$  мГал.

Характеристика итерационных процессов решения СЛАУ разными методами

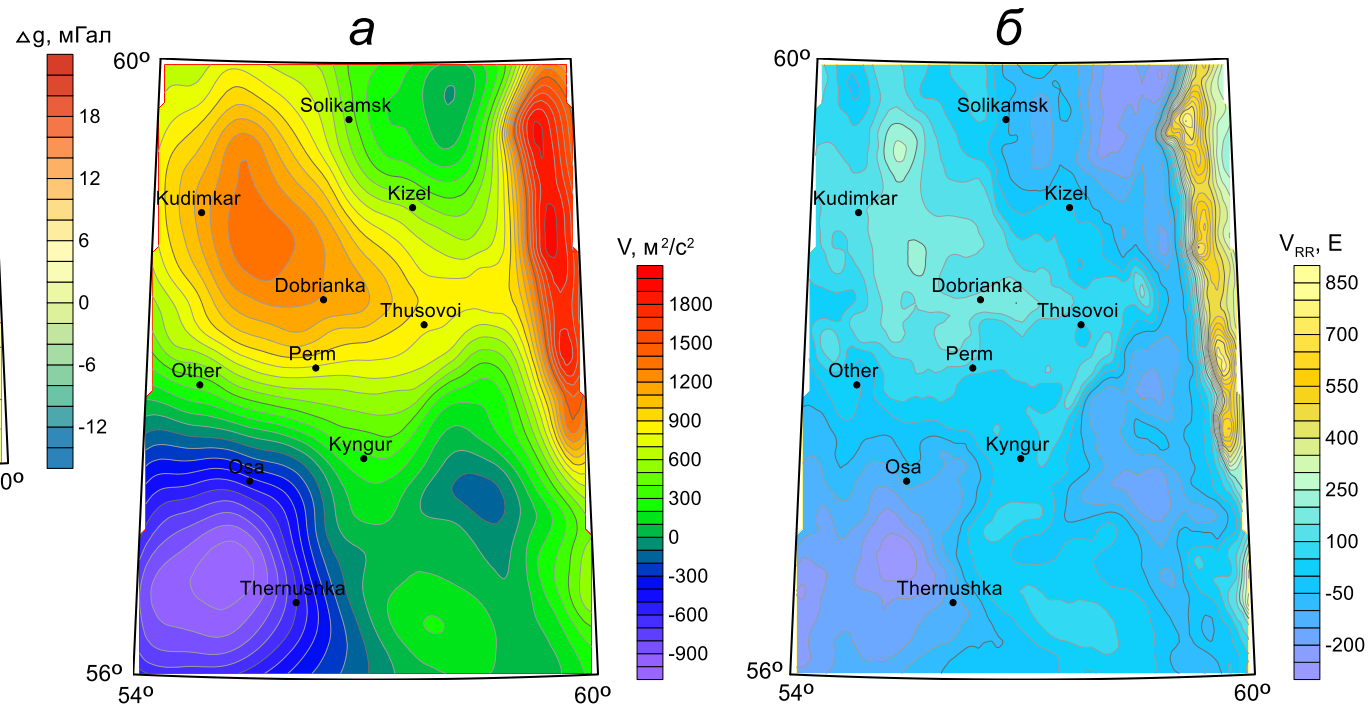
Метод решения СЛАУ	F2, мГал	FM, мГал	Число итераций	Время решения, мин:сек
Зейделя	0.03	0.14	12	17:50
релаксации	0.03	0.49	8	12:08
наискорейший градиентный спуск	0.05	1.25	18	55:08

Примечание: апостериорные оценки точности для метода Зейделя составили:  $F2 = 0.05$  мГал и  $FM = 0.21$  мГал; для метода релаксации:  $F2 = 0.02$  мГал и  $FM = 0.22$  мГал.

# Результаты трансформации аномалий силы тяжести. Лист О-40



Карты изоаномал силы тяжести в верхнем полупространстве: *a* –  $H=1.5$  км; *б* –  $H=25$  км



Карты изолиний трансформант силы на высоте  $H=3$  км:  
*a* – гравитационный потенциал  $V$ ; *б* – производная  $V_{RR}$

# 1. Оценка различий результатов пересчета гравитационных аномалий в верхнее полупространство, полученных в рамках плоской и сферической моделей Земли

Рассмотрим модельный пример: Земля является шаром с радиусом  $R_{\text{земли}} = 6371$  км, на ее поверхности  $S$ , в пределах площади размером  $2.4^\circ \times 2.4^\circ$ , в 625 точках квадратной сети с шагом  $0.1^\circ$ , вычислены значения гравитационного поля  $V_R$ , обусловленного сферическим параллелепипедом. Параллелепипед располагается в центре площади, имеет размеры в плане  $0.5^\circ$  по широте,  $0.2^\circ$  по долготе, глубина его верхней кромки составляет 5 км, нижней кромки – 15 км, эффективная плотность –  $0.2$  г/см<sup>3</sup>.

Сравним между собой две трансформанты –  $V_R^*$  и  $V_Z^*$ , которые представляют собой результаты пересчета поля на одну и ту же высоту, 25 км, полученные в рамках различных моделей Земли.

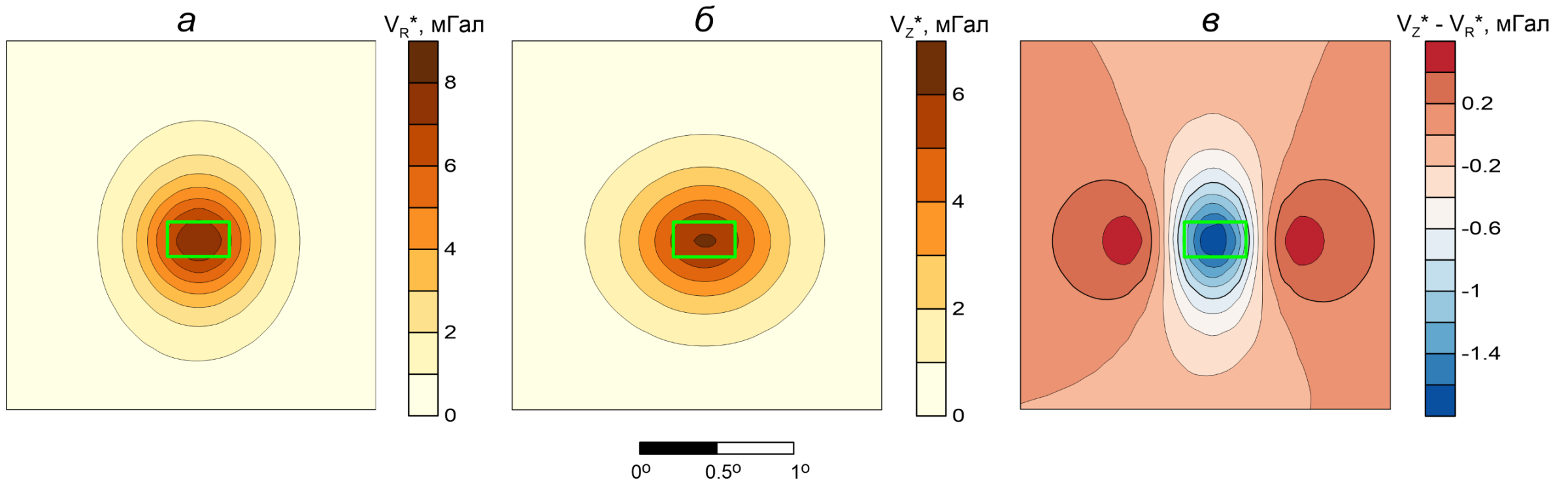
## Характеристика геофизических полей

Поле	Статистические параметры, мГал			
	Минимум	Максимум	Среднее	Ср. квадр. Отклонение
$V_R$	0.03	36.18	1.25	4.28
$V_R^*$	0.09	7.86	1.00	1.42
$V_Z^*$	0.10	6.14	0.96	1.16
$V_Z^* - V_R^*$	-1.77	0.49	-0.05	0.33

Примечание: точность построения аналитических моделей полей в обоих случаях  $\sim 0.05$  мГал.



## 2. Оценка различий результатов пересчета гравитационных аномалий в верхнее полупространство, полученных в рамках плоской и сферической моделей Земли



Карты изоаномал трансформант гравитационного поля: а -  $V_R^*$ , б -  $V_Z^*$ , в - разности  $V_Z^* - V_R^*$ .

Примечание: зеленый контур – аномалиеобразующий объект

# Выводы

1. Учет сферообразной формы Земли приводит к уточнению результатов пересчета гравитационного поля в верхнее полупространство для рассмотренного в докладе простейшего случая более чем на 28%. Эта цифра представляет собой отношение размаха разностного поля  $V_Z^* - V_R^*$  к максимальной амплитуде аномалии  $V_R^*$  над центром возмущающего объекта. Нужно отметить, что традиционно выполняющаяся трансформация результатов гравиметрических съемок в системе прямоугольных координат может порождать артефакты – достаточно интенсивные локальные аномалии силы тяжести разного знака, не связанные с геоплотностными неоднородностями среды.
2. Отказ от традиционных представлений особенно важен для преобразования гравитационного поля больших территорий, с размерами более  $6^\circ$  по широте. Однако при работе с данными высокоточной гравиметрической съемки учет сферообразности Земли может быть полезен даже при сравнительно небольших размерах изучаемых площадей (согласно В.Н. Страхову – от 100 км в поперечнике). Вычислительные схемы можно создавать с применением модели Каврайского, что в несколько раз снижает погрешности определения линейных и угловых величин, возникающие при отождествлении геодезических и сферических координат.
3. В пределах горных районов, характеризующихся изрезанным рельефом дневной поверхности, во многих случаях целесообразно пересчитывать аномалии силы тяжести на поверхность  $R=\text{const}$ . Относительная высота этой поверхности выбирается несколько выше максимальной отметки рельефа земной поверхности.
4. В дальнейшем целесообразно отказаться от постоянной глубины размещения эквивалентных источников  $R^*=\text{const}$ . Лучшая сходимость итерационных методов решения СЛАУ может быть обеспечена переменными значениями  $R^*=f(\varphi)$ , где  $f(\varphi)$  — функция, монотонно убывающая с увеличением широты  $\varphi$ .

Благодарим за внимание

Представленные результаты были  
получены при поддержке  
Российского фонда фундаментальных  
исследований (грант 19-05-00654-А).