



# Методы теоретической механики и оптимального оценивания в инерциальной гравиметрии

В.С. Вязьмин, А.А. Голован, Ю.В. Болотин

Лаборатория управления и навигации  
Кафедра прикладной механики и управления  
Механико-математический факультет  
МГУ имени М.В. Ломоносова

# План доклада



- Бескарданные гравиметры
- Этапы обработки измерений бескарданного гравиметра
- Основное уравнение инерциальной гравиметрии
- Оценивание аномалии вдоль траектории
- Пример обработки экспериментальных данных
- Перспективы применения локальных гармонических моделей в аэрогравиметрии
- Выводы

# Бескарданные аэрогравиметры



## □ Состав гравиметра

- *Бескарданная инерциальная навигационная система (БИНС) – 3 акселерометра, 3 датчика угловой скорости (гироскопы)*
- *Система термостабилизации*
- *Приемники ГНСС геодезического класса (бортовой и наземные)*

## □ Требования к точности БИНС

- *Навигационный класс точности (дрейфы гироскопов  $<0.01$  град/час, стабильны в запуске, шум акселерометров  $<0.2$  мГал при осред. 60 с)*
- *Широкий динамический диапазон акселерометров – не менее 2 g*
- *Высокая точность термостабилизации (вариации температуры внутри гравиметра  $<0.1^\circ\text{C}$ )*



Гравиметр iMAR (фото с сайта производителя)

# Этапы постобработки данных бескарданного гравиметра



1. Определение координат и скоростей антенны бортового приемника ГНСС
  - *Вычисляются в фазово-дифференциальном режиме*
  
2. Начальная (и конечная) выставка БИНС гравиметра
  - *Определение ориентации корпуса гравиметра на стоянках до и после полета*
  
3. Интеграция данных БИНС и ГНСС
  - *Определение координат, скоростей и углов ориентации гравиметра вдоль траектории*
  
4. Оценивание аномалии силы тяжести вдоль траектории
  
5. Построение карт аномалий по результатам съемки

# Этапы постобработки данных бескарданного гравиметра



## 1. Определение координат и скоростей антенны бортового приемника ГНСС

- *Вычисляются в фазово-дифференциальном режиме*

## 2. Начальная (и конечная) выставка БИНС гравиметра

- *Определение ориентации корпуса гравиметра на стоянках до и после полета*

## 3. Интеграция данных БИНС и ГНСС

- *Определение координат, скоростей и углов ориентации гравиметра вдоль траектории*

## 4. Оценивание аномалии силы тяжести вдоль траектории

## 5. Построение карт аномалий по результатам съемки



# Начальная и конечная выставка БИНС

## Используемые данные

- *Измерения гравиметра на стоянках до и после полета*
- *Координаты опорной точки и опорное значение  $g$*

## Что требуется определить?

- *Начальную (и конечную) ориентацию корпуса БИНС гравиметра*
- *Смещение нулевого сигнала гравиметра на стоянках; линейный дрейф гравиметра*

## Особенности измерений

- *Неконтролируемые внешние воздействия (ветер, работа двигателей и пр.)*

## Обработка измерений

- *Лабораторией разработан алгоритм, работоспособный в условиях вибраций*



# Алгоритм начальной выставки

□ Определение начальных углов курса, крена, тангажа БИНС гравиметра

○ *Используются математические модели теоретической механики*

□ Определение смещения нулевого сигнала гравиметра

$$f_3' = -L_3^T \mathbf{g}_{опор} + \Delta f_3^0 + q_{f_3}$$

Измерения  
вертикального  
акс-а

Проекция силы тяж.  
из географ. сист.  
коорд. на приборную  
вертикаль

Смещение  
нуля

Шум  
акс-а

○ *Вектор-строка  $L_3$  – орт оси чувствительности гравиметра в географических осях*

○  *$\mathbf{g}_{опор} = (0, 0, -g_{опор})^T$  – вектор силы тяжести в географических осях в опорной точке*

# Основное уравнение бескарданной гравиметрии



- Уравнение движения чувствительной массы гравиметра под действием силы тяжести и внешней силы  $\mathbf{f}$  в проекции на географическую вертикаль:

$$\dot{V}_3 = \underbrace{\frac{V_E^2}{R_E} + \frac{V_N^2}{R_N} + 2uV_E \cos \varphi}_{\text{Поправка Этвеша}} + L_3^T \mathbf{f}_z - g_n - \delta g$$

Производная вертикальной скорости     
 Вертикальная проекция удельной внешней силы     
 Нормальная сила тяжести с поправкой за высоту     
 Аномалия силы тяжести в св. возд.

- Вектор-строка  $L_3$  – орт оси чувствительности гравиметра в географических осях

- Модель измерений акселерометров гравиметра:

$$L_3'^T \mathbf{f}'_z = L_3^T \mathbf{f}_z + \underbrace{k_1 f_1' + k_2 f_2'}_{\text{Остаточные угл. ошибки определения вертикали}} + L_3^T \mathbf{q}_f$$

Вертикальная проекция измерений акселерометров     
 Вертикальная проекция удельной внешней силы     
 Шум в измерениях акселерометров





# Решение основного уравнения аэрогравиметрии

## □ Задача аэрогравиметрии

- *Определить  $\delta g$ ,  $k_1$ ,  $k_2$  по измерениям гравиметра и данным ГНСС на траектории ЛА*

## □ Предположения

- *Калибровочные параметры  $k_1$ ,  $k_2$  – медленные функции времени*
- *Погрешности измерений – процессы типа белого шума*

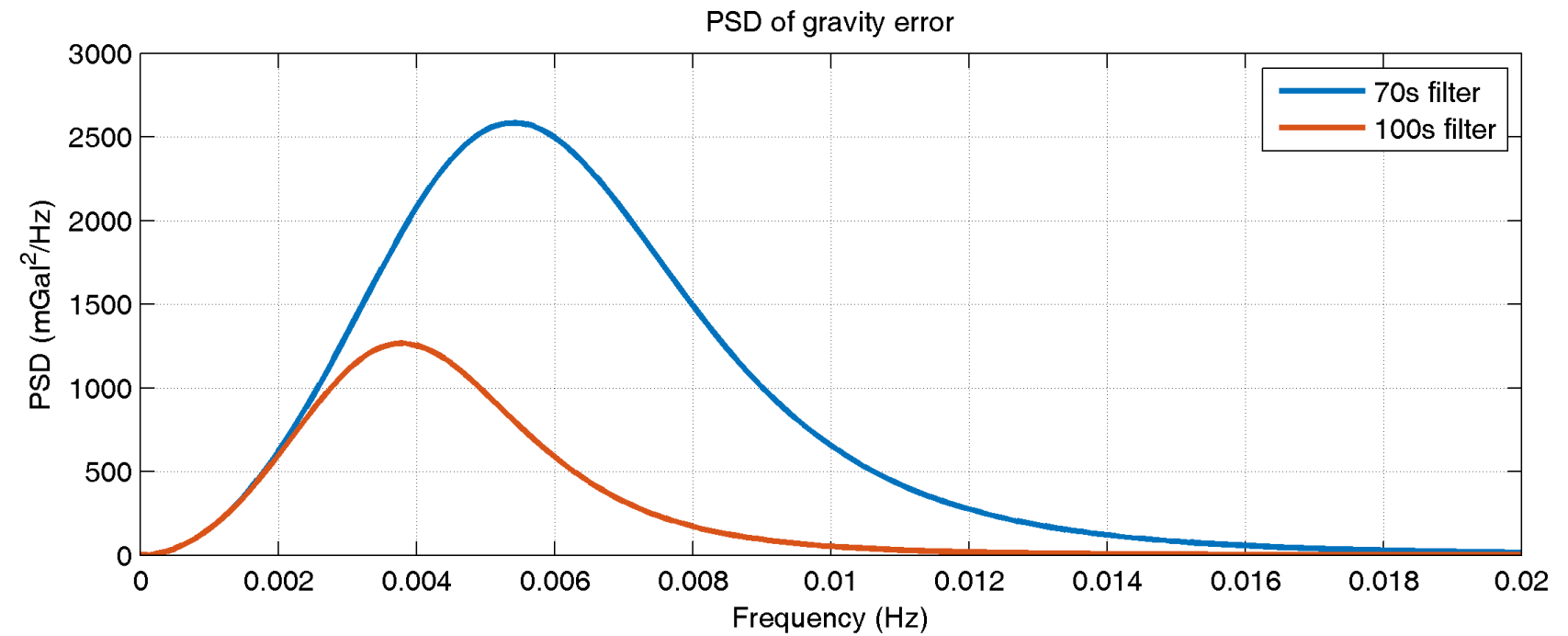
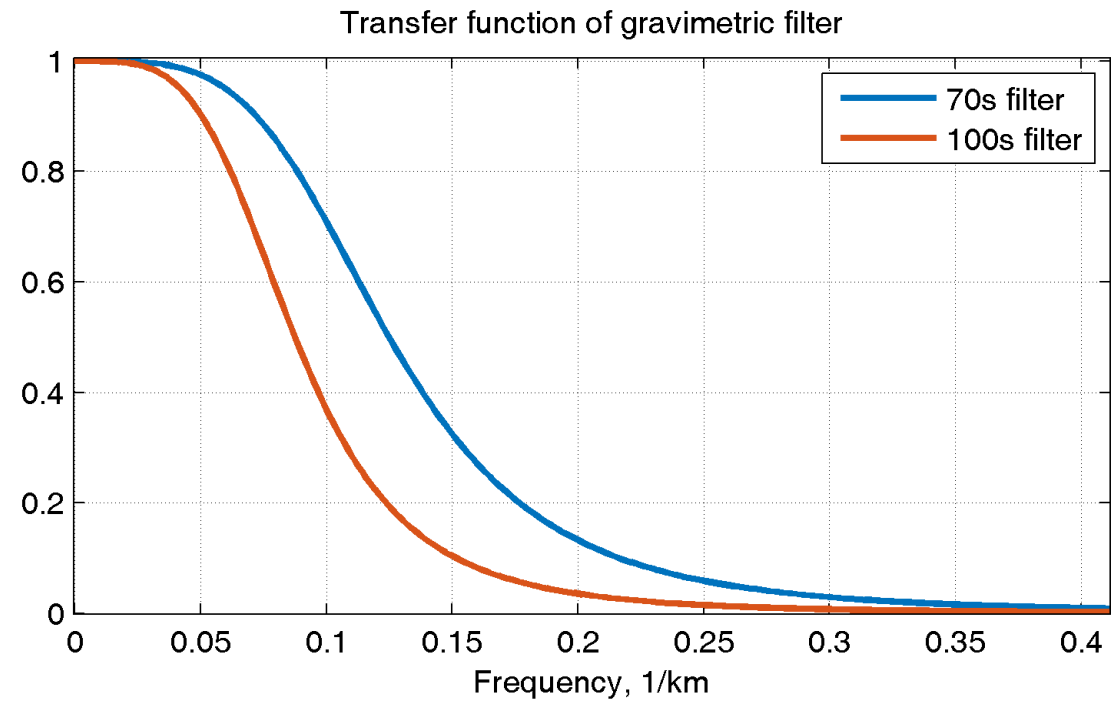
## □ Математическая постановка задачи

- *Стандартная линейная задача оптимального стохастического оценивания с критерием минимума СКО ошибки оценки неизвестных*

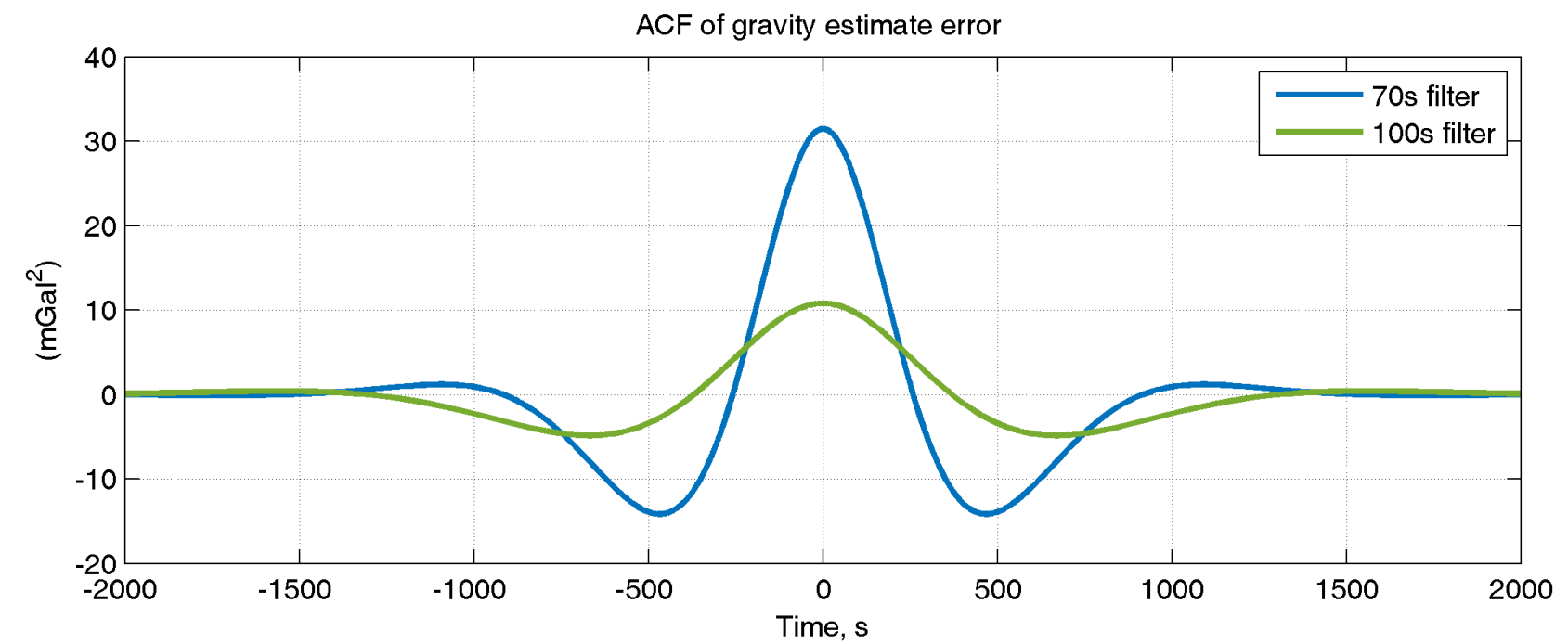
## □ Гравиметрический фильтр

- *Оценки неизвестных  $\delta g$ ,  $k_1$ ,  $k_2$  определяются фильтром Калмана со сглаживанием*
- *Фильтр Калмана – оптимальный алгоритм оценивания (известен с 1960-х гг.)*
- *Настраиваемый параметр фильтра – время осреднения  $T$*

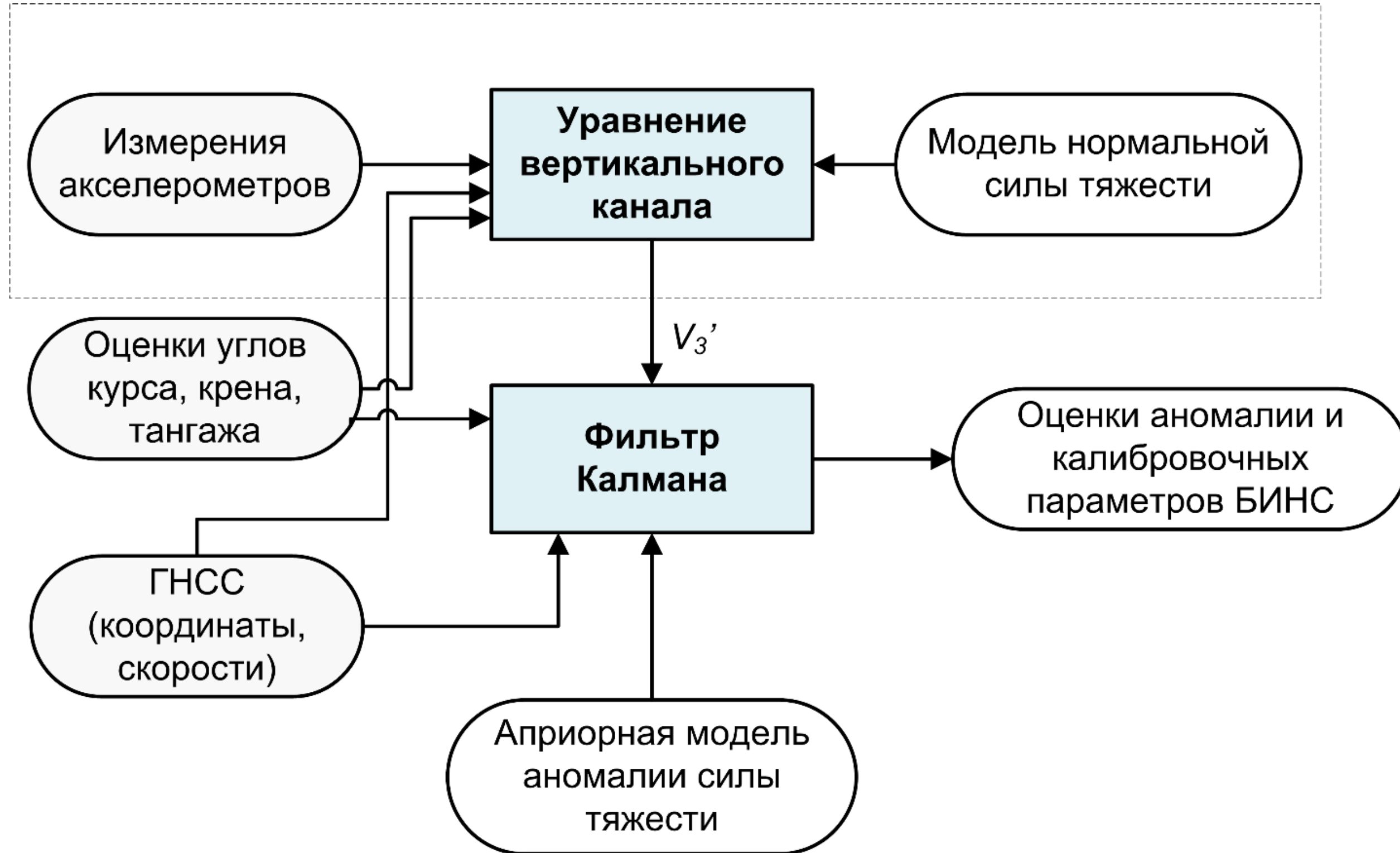
# Свойства гравиметрического фильтра



- Вверху: передаточная функция фильтра при частотах среза 1/70 Гц и 1/100 Гц
- Справа: спектральная плотность ошибки оценки аномалии (вверху) и ее корреляционная функция (внизу)



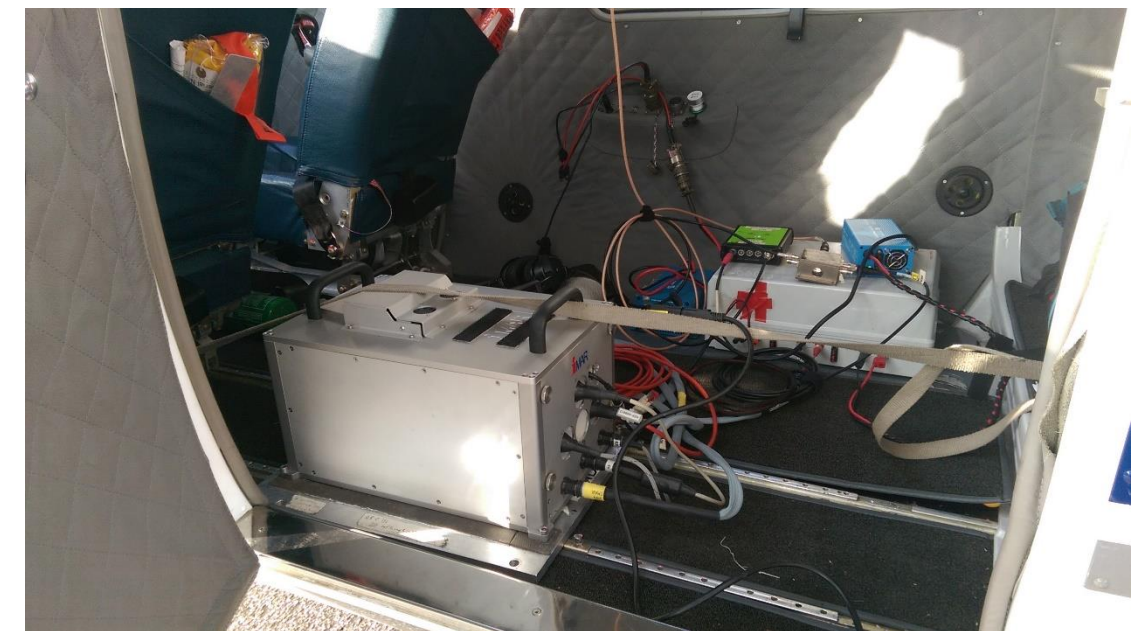
# Алгоритм оценивания аномалии силы тяжести



# Примеры обработки данных



- Бескарданный гравиметр - iMAR iNAT-RQH
- Частота измерений инерциальных датчиков: 300 Гц
- Приемники ГНСС - JAVAD DELTA
- Частота измерений приемников: 1 Гц
- Съёмка выполнена Датским техническим университетом (2019 г.)



*Фото предоставлены Датским техническим университетом.*

# План съемки

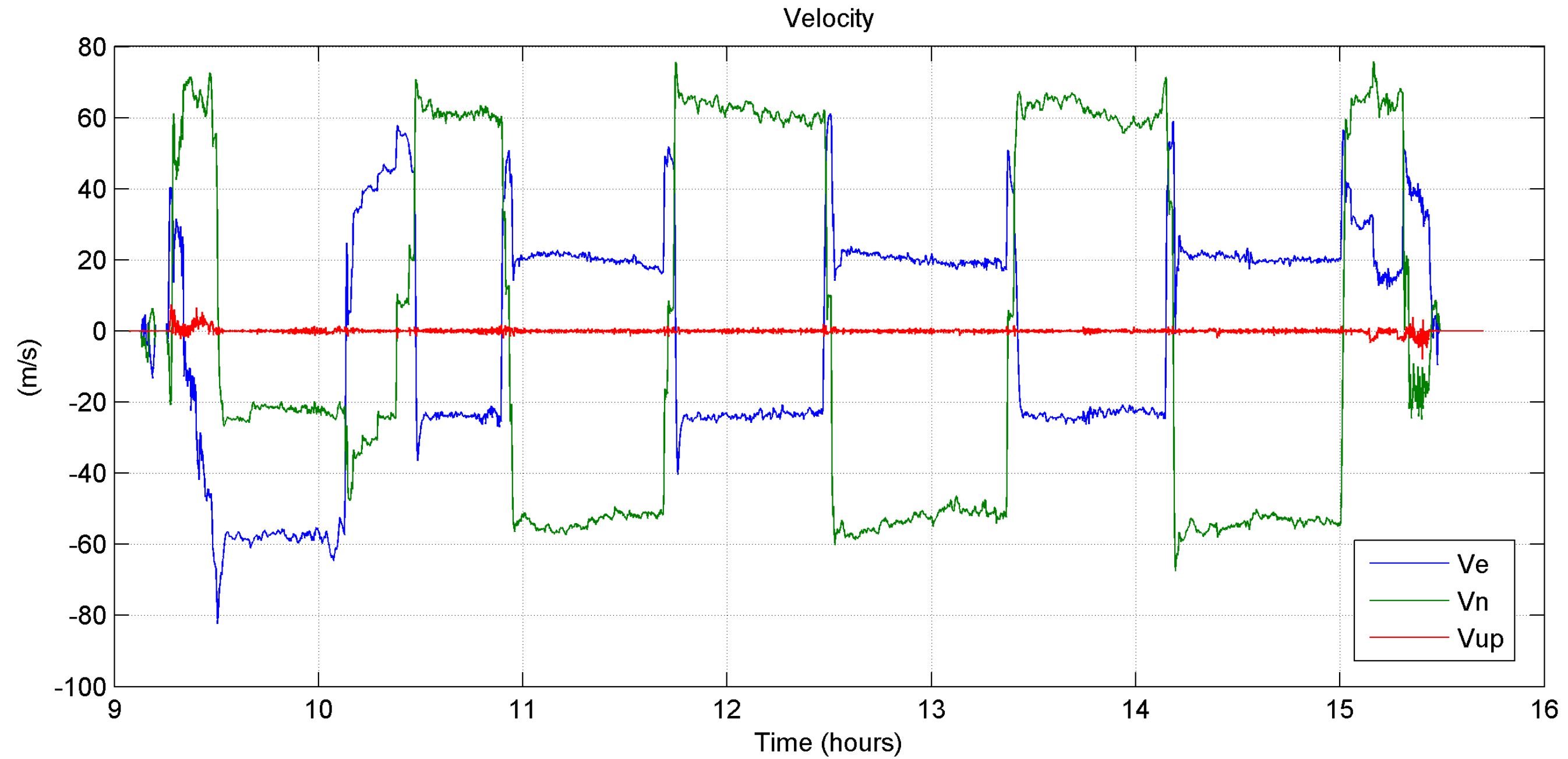


- 7 галсов на высоте 1200 м
- Расстояние между галсами: 7.5 км
- Длина галсов: от 90 до 160 км
- Скорость самолета на галсе: 65 м/с
- Длительность полета: 8 ч



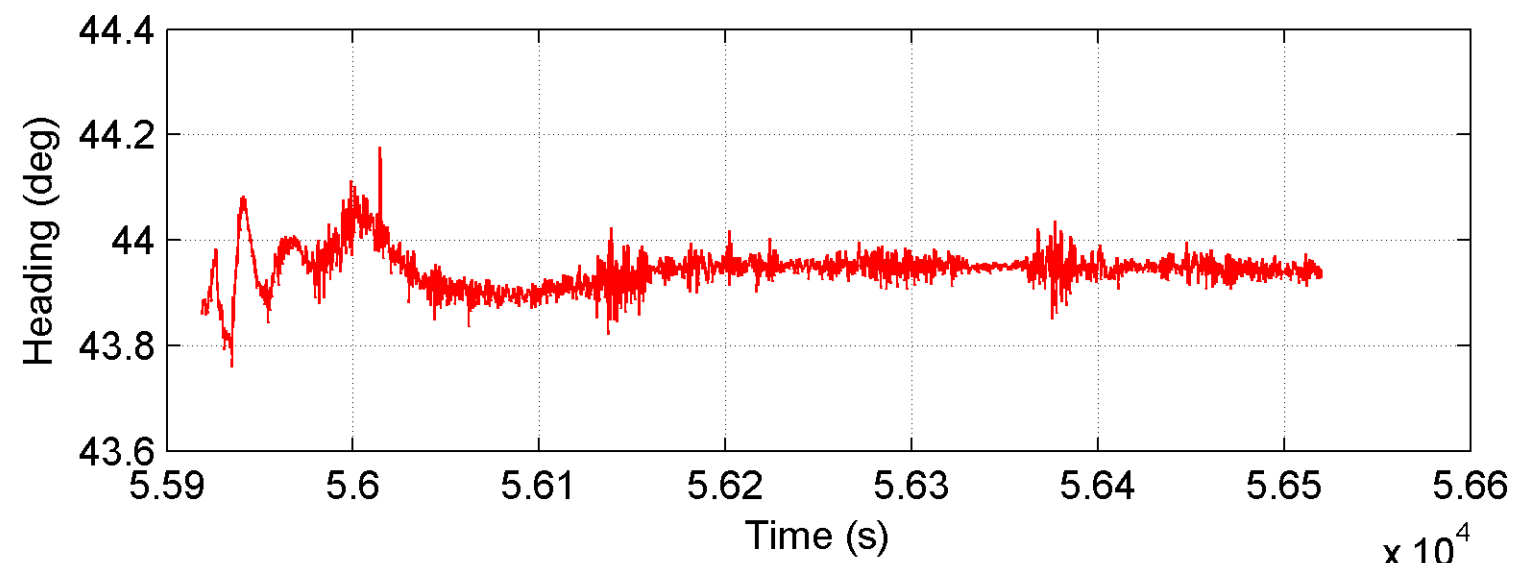
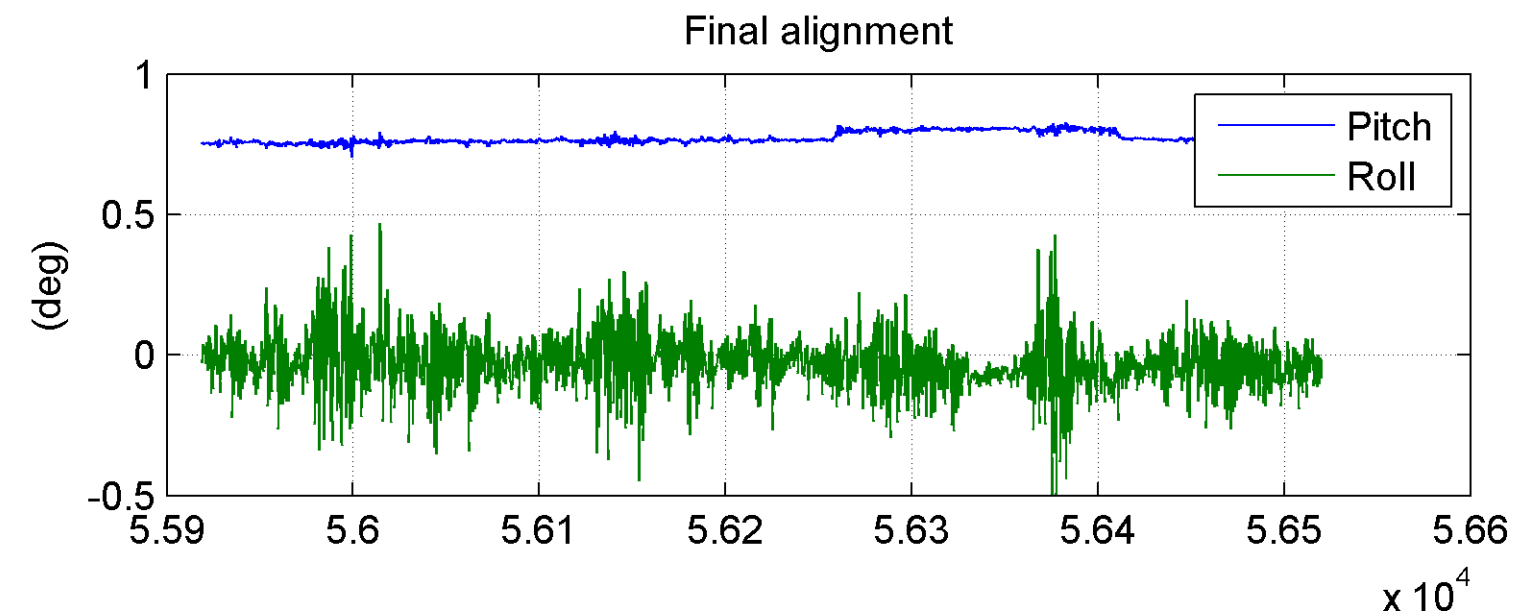
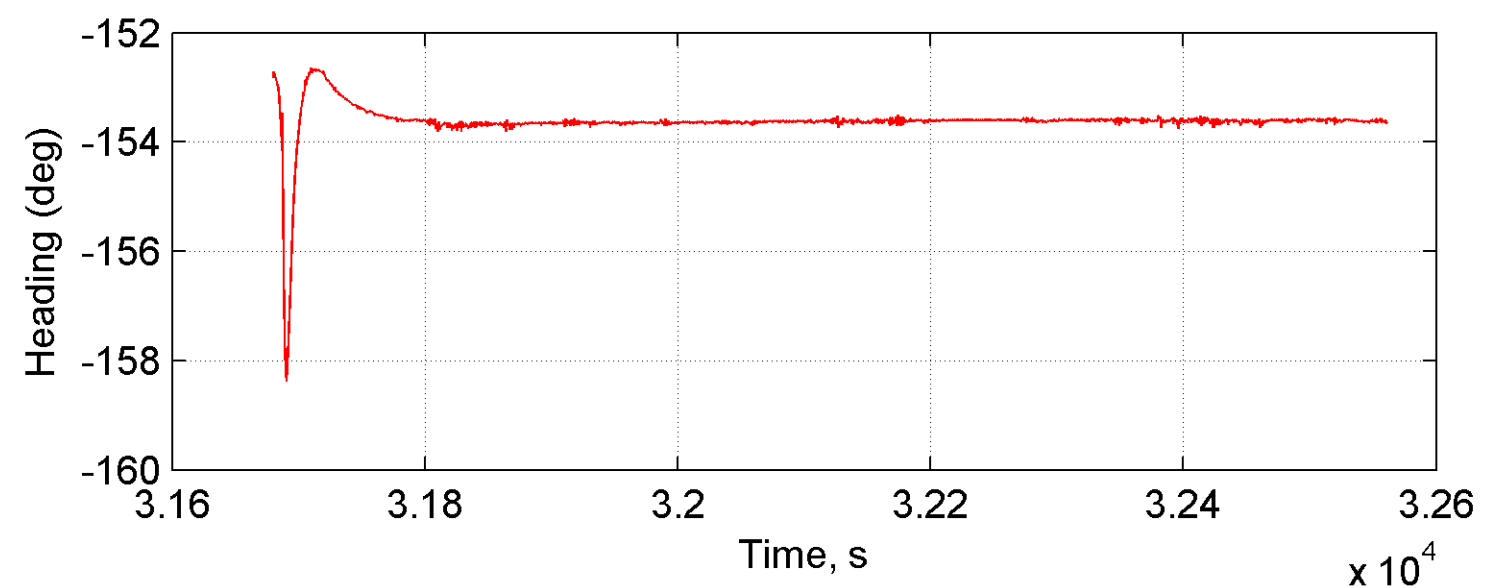
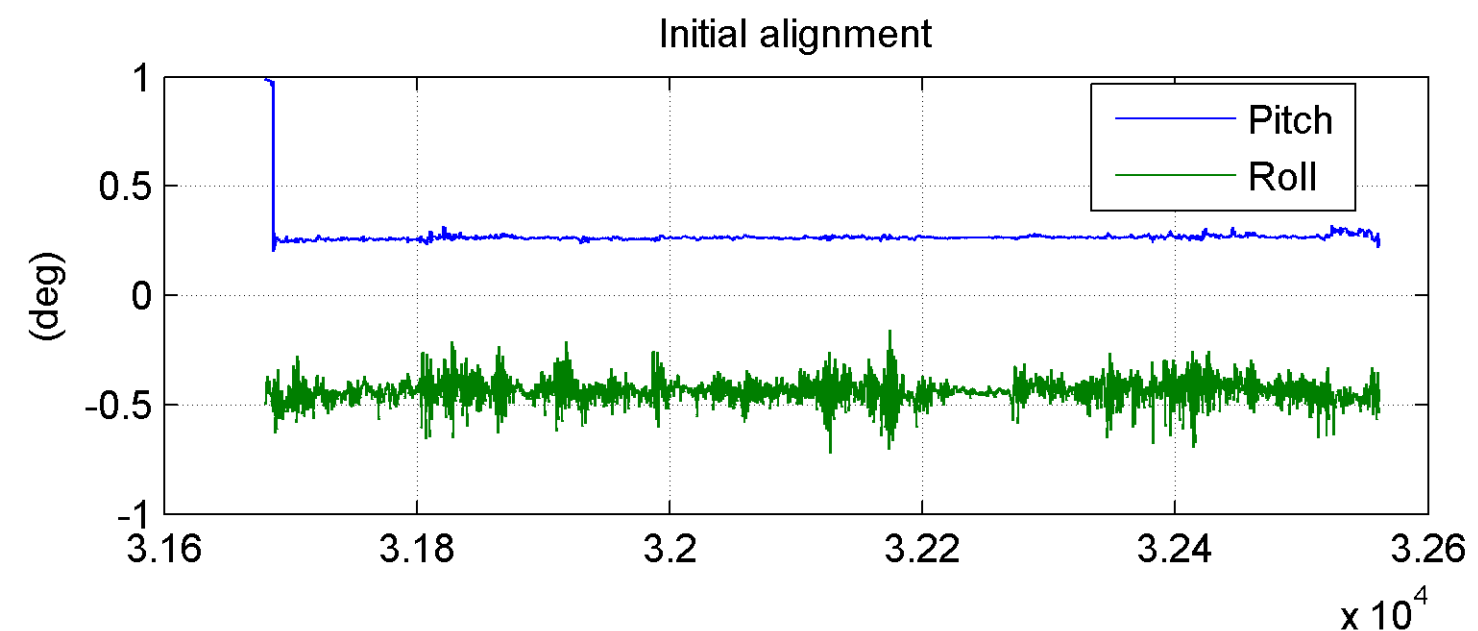
*Траектория полета*

# Спутниковое скоростное решение



Восточная, северная и вертикальная компоненты скорости ГНСС, [м/с]

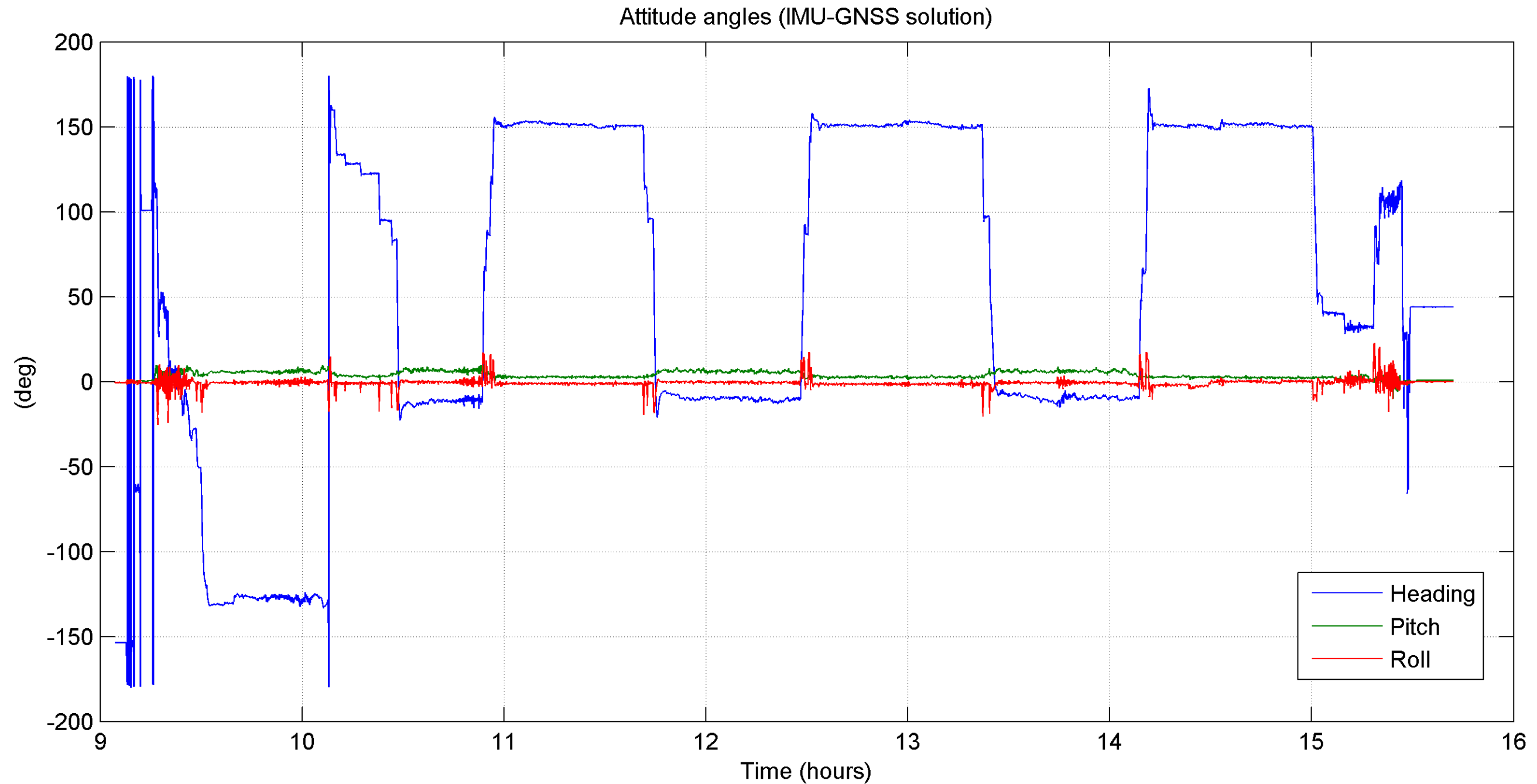
# Начальная и конечная выставка БИНС



Результаты начальной выставки БИНС. Вверху: углы тангажа и крена, внизу: угол курса, [град]

Результаты конечной выставки БИНС. Вверху: углы тангажа и крена, внизу: угол курса, [град]

# Углы ориентации гравиметра на траектории полета



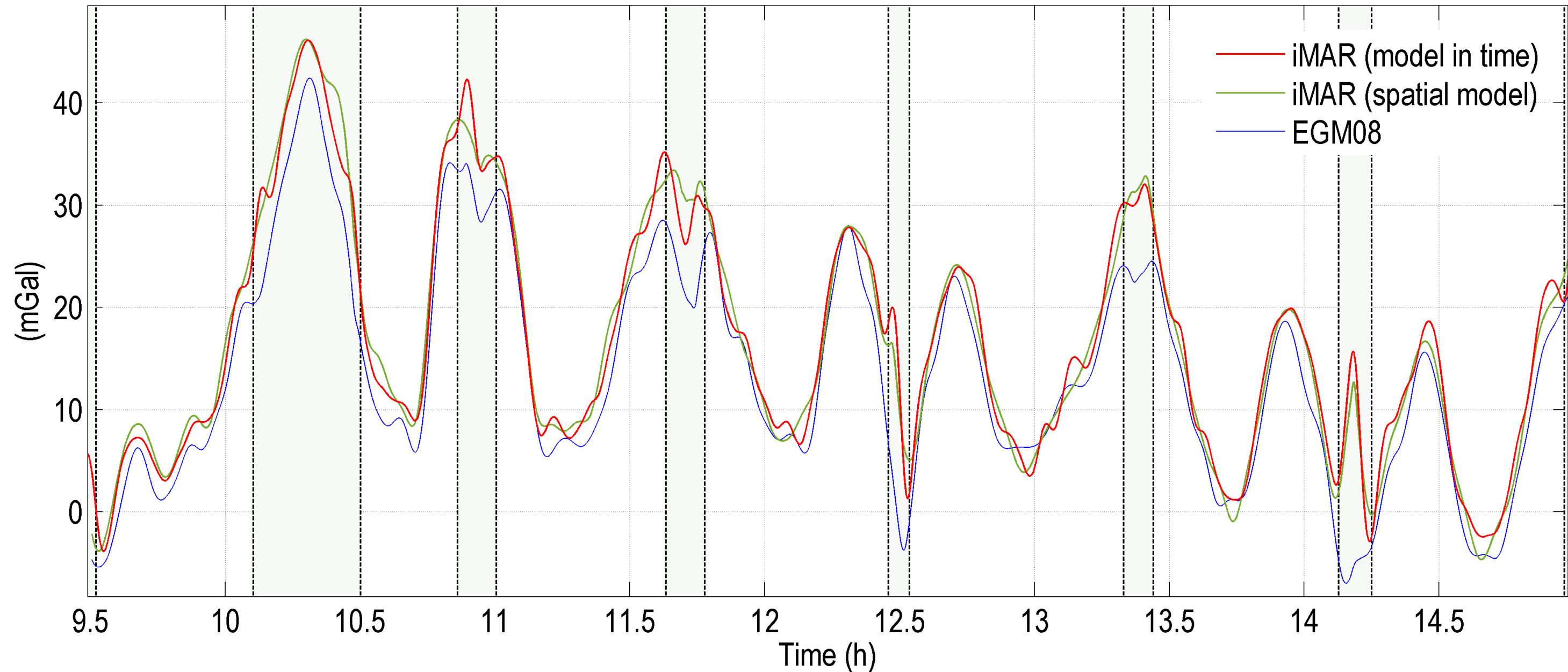
Углы курса, тангажа и крена корпуса гравиметра на траектории полета, [град]



# Аномалия силы тяжести на траектории полета



iMAR gravity estimates (gravity modeling in time / spatial modeling)

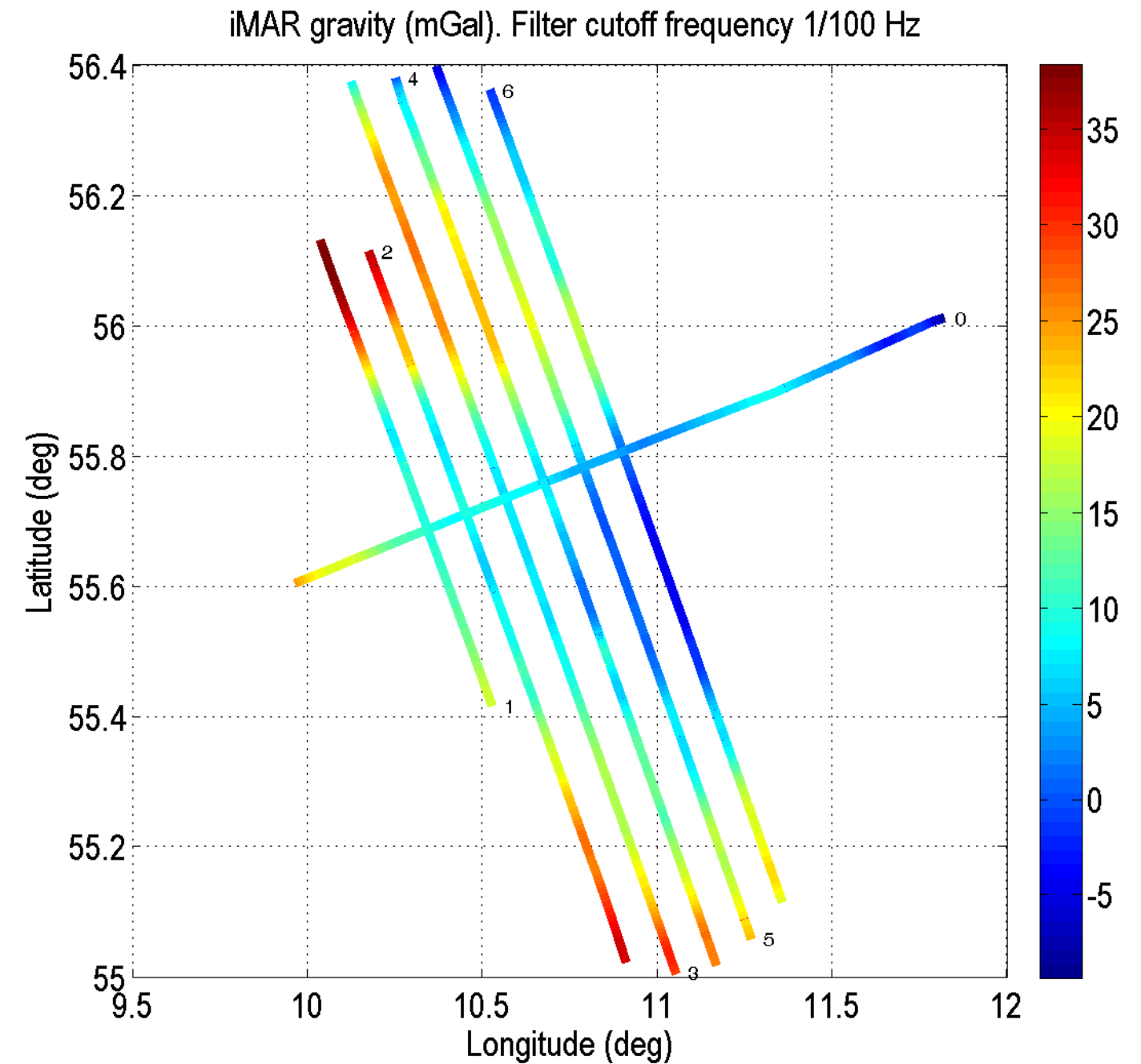


Оценки аномалии гравиметрическими фильтрами с временем осреднения 100 сек и данные модели EGM2008, [мГал]. Белые полосы соответствуют галсам.

# Аномалия силы тяжести на галсах

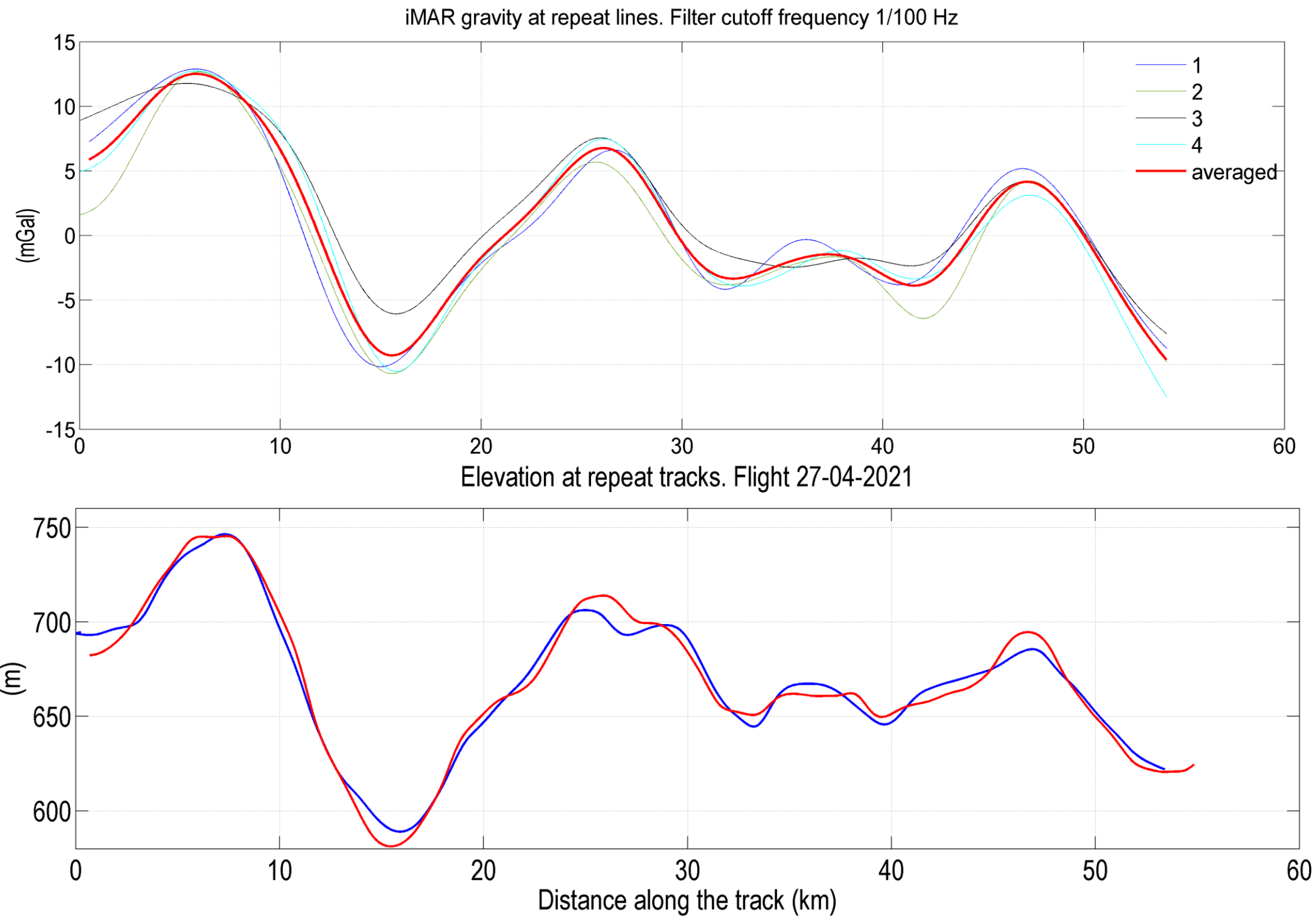


- Частота среза гравиметрического фильтра: 1/100 Гц
- Эквивалентное пространственное разрешение: 3.2 км
- Точность по пересечениям галсов: 0.8 мГал (СКО/ $\sqrt{2}$ )
- Разность с моделью EGM2008: 1.5 мГал (СКО)



Оценки аномалии на галсах, [мГал]

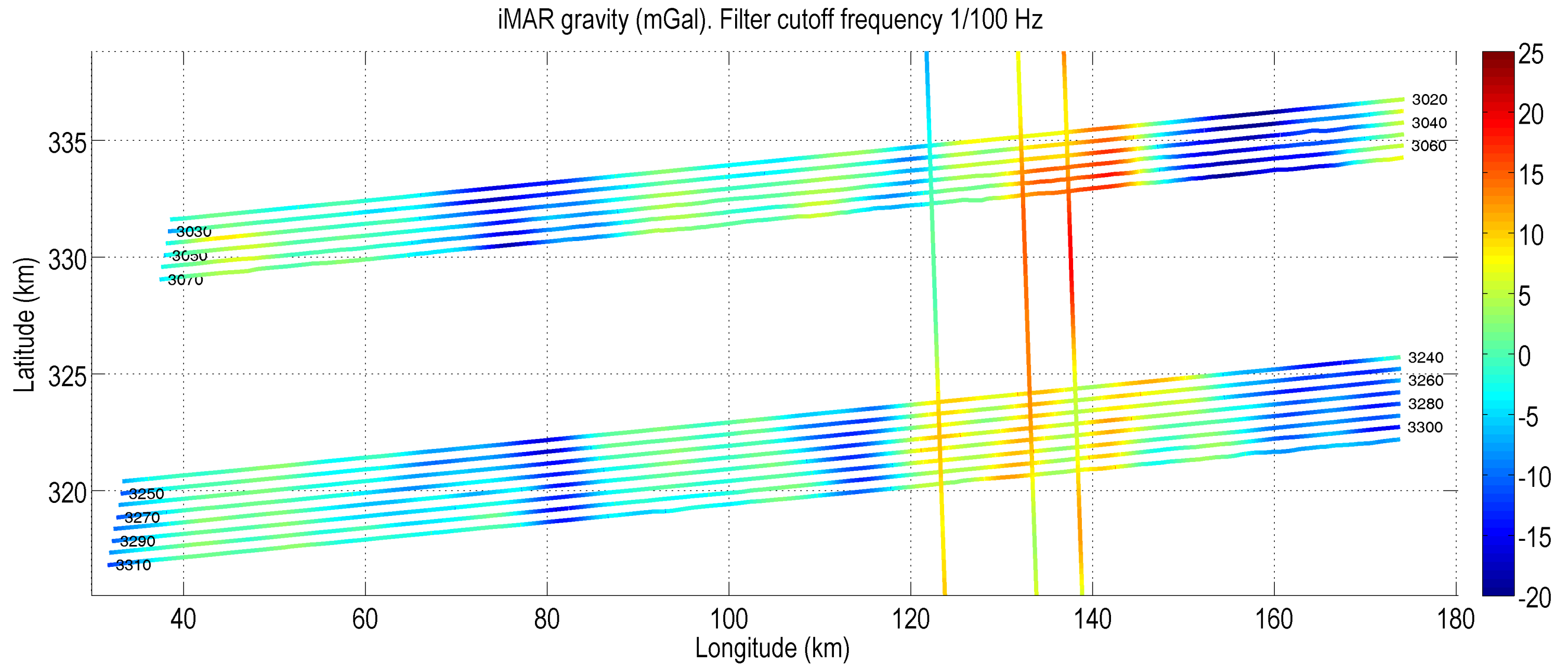
# Оценивание аномалии на повторных галсах



Вверху: аномалии на повторных галсах, [мГал]. СКО: 1.0 мГал

Внизу: высота рельефа, [м]

# Оценки аномалии на галсах нескольких полетов



Оценки аномалии на галсах [мГал]. Частота среза фильтра: 1/100 Гц.

Точность по пересечениям галсов: 1.0 мГал ( $СКО/\sqrt{2}$ )



# Перспективный подход к построению карт аномалий

## □ Постановка задачи

- *Построить карту аномалий в св. возд. по оценкам гравиметрического фильтра на галсах*

## □ Требования к алгоритму построения карты

- *Учет свойств гравиметрического фильтра (весовой функции, корреляционной функции ошибок оценивания аномалии)*
- *Учет пространственных свойств аномалии (зависимость значений на соседних галсах)*
- *Возможность обработки галсов с произвольными азимутами*
- *Возможность контроля пространственного разрешения карты*

## □ Математический аппарат

- ***Локальные гармонические модели** возмущающего потенциала на основе численного метода многомасштабного анализа на сфере*
- *Методы оптимального оценивания*

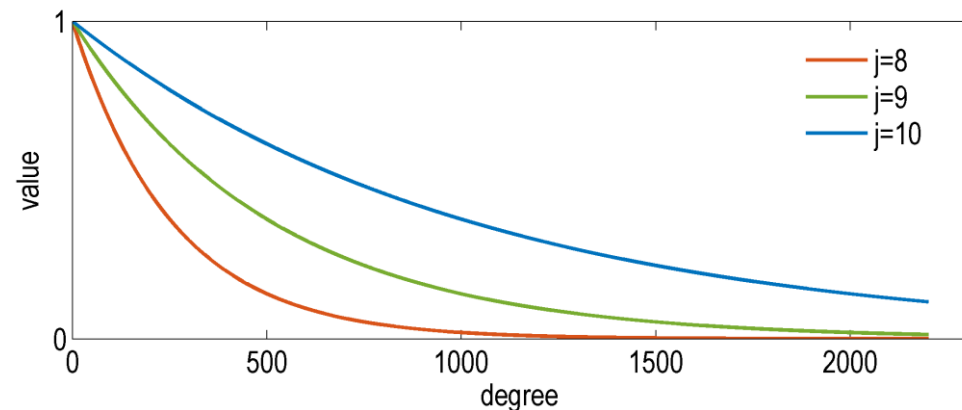


# Локальная гармоническая модель потенциала

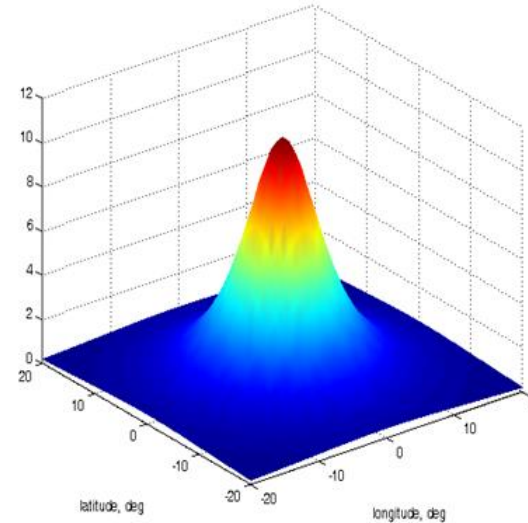
□ Параметризация потенциала масштабирующими функциями на сфере:

$$T(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^K a_k \Phi_k(\mathbf{r}), \quad \Phi_k(\mathbf{r}) = \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{R}{|\mathbf{r}|} \right)^{n+1} (2n+1) e^{-\alpha n} P_n(\cos \psi_k)$$

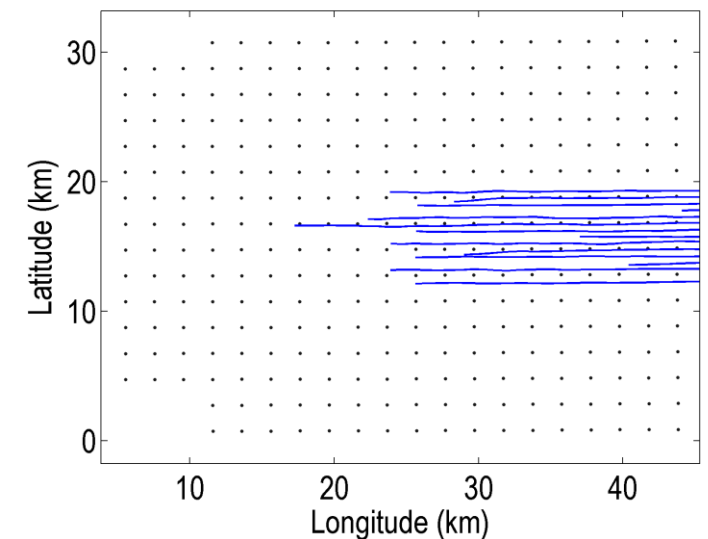
- $a_k$  – коэффициенты параметризации в районе съемки,  $k=1, \dots, K$
- $\Phi_k(\mathbf{r})$  – масштабирующая функция с центром в  $k$ -м узле сетки на сфере  $R$
- $P_n(\cos \psi_k)$  – полном Лежандра степени  $n$ ;  $\alpha$  – параметр масштаба



Частотный диапазон функции  $\Phi_k(\mathbf{r})$  на сфере



Вид масштабирующей функции в пространстве



Область параметризации и фрагменты галсов

□ Алгоритм построения карты

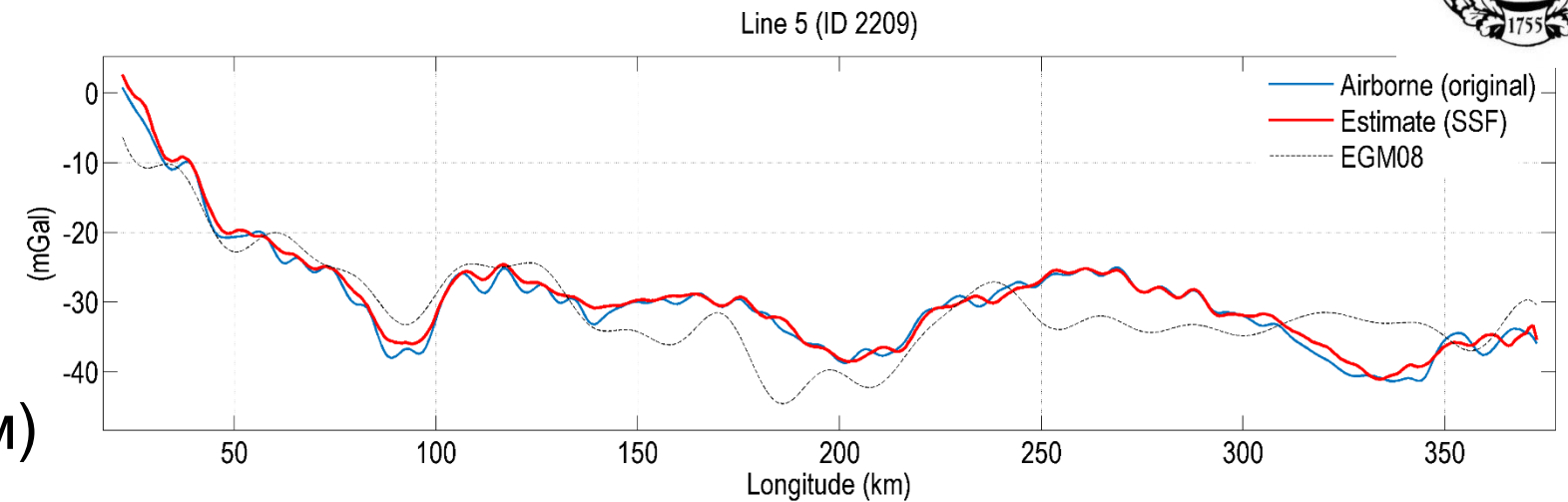
- Итерационное оценивание коэф-тов параметризации  $a_k$  (с итерациями по числу галсов)

# Пример обработки данных

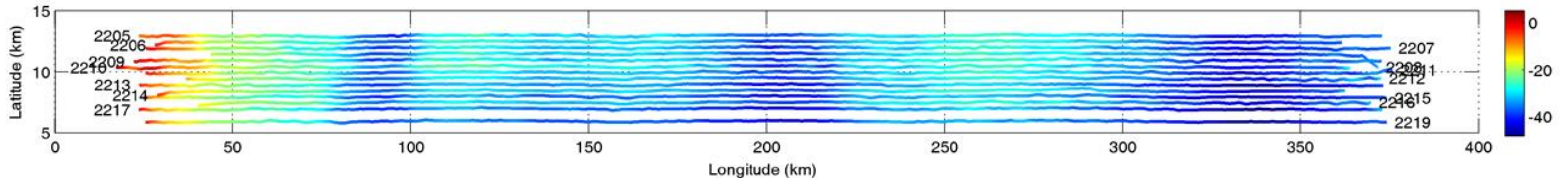


## Исходные данные

- Аномалии на галсах (шаг 500 м, высота 540 м) из съемки с GT-2A (ИФЗ РАН, 2005 г.)
- Частота среза фильтра 1/100 Гц (эквив. разреш. 4 км)

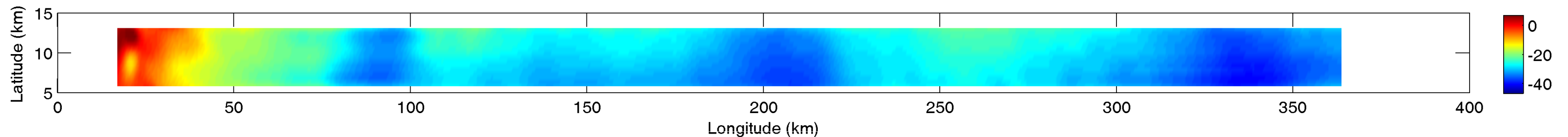


Исходная аномалия на галсе (синий) и аномалия, оцененная при построении карты (красн.)



Аномалии на галсах (исходные данные)

## Карта аномалий на высоте полета



Аномалии на высоте полета в узлах сетки 1.5 км x 1.5 км, точность карты: 0.5 мГал.



## Выводы

- ❑ Разработано ПО постобработки данных бескарданного аэрогравиметра. Начиная с 2020 г., обработано более 50000 погонных км галсов в промышленных съемках ГНПП «Аэрогеофизики».
- ❑ Обработка показала возможность определения аномалий силы тяжести с точностью лучше 1 мГал при частоте среза фильтра 1/100 Гц.
- ❑ Разработан подход к построению карт аномального поля на основе локальных гармонических моделей поля. Подход учитывает свойства гравиметрического фильтра и пространственные свойства поля.

Спасибо за внимание!